

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

В. М. Охріменко, О. О. Воронков, Т. Б. Воронкова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

***«ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»***

*(для студентів другої вищої освіти ФПО та ЗН спеціальностей
7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво»,
7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція»)*

ХАРКІВ
ХНУМГ
2014

Охріменко В. М. Конспект лекцій з курсу «Теорія імовірностей і математична статистика» (для студентів другої вищої освіти ФПО та ЗН спеціальностей 7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво», 7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція») / В. М. Охріменко, О. О. Воронков, Т. Б. Воронкова; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х. : ХНУМГ, 2012. – 67 с.

Автори: В. М. Охріменко, О. О. Воронков, Т. Б. Воронкова

Рецензент к.т.н., доц. А. І. Кузнецов

Рекомендовано кафедрою „Інформаційних систем і технологій в міському господарстві”, протокол № 88 від 11.05.12 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Змістовий модуль 1. ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ.....	6
Тема 1. Основні поняття теорії імовірностей.....	6
Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події	6
Тема 2. Операції над подіями. Теореми теорії імовірностей Основні формули теорії імовірностей.....	8
Теорема додавання.....	9
Теорема множення	10
Формула повної імовірності.....	10
Формула Бейеса (теорема гіпотез)	11
Формула Бернуллі	11
Локальна теорема Лапласа.	12
Інтегральна теорема Лапласа.	12
Формула Пуассона.	13
Тема 3. Поняття випадкової величини. Універсальні закони розподілу	13
Функція розподілу.....	14
Щільність розподілу	15
Тема 4. Числові характеристики випадкової величини.	16
Властивості числових характеристик	18
Тема 5. Найважливіші закони розподілу випадкових величин.....	18
Біноміальний закон розподілу	18
Закон розподілу Пуассона.....	18
Експонентний закон розподілу.....	20
Нормальний закон розподілу імовірностей.....	22
Поняття про центральну граничну теорему	24
Закон рівномірної щільності.	25
Тема 6. Система випадкових величин. Закони розподілу та числові характеристики системи.	26
Багатомірна випадкова величина	26
Функція розподілу системи двох випадкових величин	26
Щільність розподілу системи двох випадкових величин	26
Числові характеристики системи випадкових величин	27
Функції випадкових величин	28
Тема 7. Закон великих чисел.....	29
Принцип практичної впевненості. Формулювання закону великих чисел	29
Змістовий модуль 2. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА.	34
Тема 8. Основні поняття. Суть вибіркового методу.....	34
Визначення закону розподілу спостережуваної ознаки за статистичними даними	37
Тема 9. Числові характеристики варіаційного ряду	38

Властивості вибірових числових характеристик	40
Довірчий інтервал і довірча імовірність	42
Тема 10. Елементи теорії кореляції.	44
Метод найменших квадратів.....	45
Вибірковий коефіцієнт кореляції	46
Вибіркове кореляційне відношення	48
Елементи регресійного аналізу	49
Тема 11. Перевірка статистичних гіпотез.....	50
Статистичні гіпотези.....	50
Порівняння вибіркової середньої та генеральної середньої нормальної сукупності	52
Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей .	53
Критерії згоди.....	54
Елементи дисперсійного аналізу	55
Тема 12. Елементи теорії випадкових процесів.....	58
Поняття випадкового процесу	58
Стационарний випадковий процес	60
Ергодична гіпотеза.....	62
Імітаційне моделювання	63
СПИСОК ДЖЕРЕЛ	66

ВСТУП

Курс «Теорія імовірностей» є нормативною дисципліною в навчальному плані перепідготовки спеціалістів за спеціальностями 7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво» та 7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція». Обсяг курсу становить 54 академічних години або 1,5 кредити ECTS у т.ч. 9 годин аудиторних занять (5 годин лекцій та 4 години практичних занять), на самостійну роботу студента залишається 45 годин. Програма курсу включає два змістових модуля: «Теорія імовірностей» та «Математична статистика», відповідно до яких виконується проміжний контроль знань. Підсумковий контроль знань - залік. У процесі вивчення курсу студенти повинні виконати контрольну роботу.

Теорія імовірностей - математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Випадковим називають таке явище, яке при багаторазовому повторенні досліду протікає щораз по-іншому. Виникає питання, чи у кожному випадковому явищі міститься закономірність? Якщо випадкове явище має так звану статистичну однорідність, то воно містить закономірність і його називають стохастичним. У процесі своєї діяльності людина часто стикається з випадковістю та інтуїтивно припускає наявність у цій випадковості закономірності. Проте іноді покладатися на інтуїцію небажано, все залежить від складності та важливості розв'язуваної проблеми. Тоді виникає необхідність визначити ступінь можливості будь-яких подій або наслідків шляхом математичних розрахунків. Тут доводиться звертатися до методів теорії імовірностей і математичної статистики.

Інформацію про випадкове явище можна отримати в результаті його спостереження, тобто шляхом проведення дослідів. Для виявлення закономірності проводять обробку дослідних даних. Цю задачу вирішує математична статистика, теоретичною базою якої є класична теорія імовірностей.

Теорія імовірностей вивчає закономірності, які виявляються в масових випадкових явищах. Її методи широко застосовують при розв'язанні задач в різних галузях техніки, економіки та природознавства: у теорії надійності, масового обслуговування, автоматичного управління, зв'язку та інших теоретичних і прикладних науках.

Метою вивчення дисципліни «Теорія імовірностей» є формування базових знань в області застосування імовірнісно-статистичного апарата, вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх імовірнісних характеристик з метою прогнозування.

У результаті вивчення курсу студенти повинні оволодіти основними методами визначення імовірнісних характеристик випадкових величин, статистичного опису результатів спостереження та перевірки статистичних гіпотез з метою прийняття на їх основі обґрунтованих рішень.

Змістовий модуль 1 ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Тема 1. Основні поняття теорії імовірностей

Теорія імовірностей - математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Випадковим називають таке явище, яке при багаторазовому повторенні досліду протікає щораз по-іншому. Наприклад, вимірювання - якщо ми бажаємо отримати точний результат, стрілянина по мішені являє класичний приклад випадкового явища, погодні умови та ін.

На відміну від випадкових явищ існують детерміновані явища. Це, як правило, закони природи, які вивчаються в курсі фізики, наприклад:

- прискорення вільного падіння дорівнює $9,8 \text{ м/с}^2$;
- сила, що прикладена до матеріальної точки, надає їй прискорення (за формулою $F=ma$);
- струм, що протікає через опір R під дією напруги U , пропорційний напрузі $I=U/R$.

Таким чином, якщо при відтворенні певних умов незмінно відбувається певна подія (та сама, тобто результат незмінно повторюється), то має місце детерміноване явище. Прогноз результату такого досліду можна здійснити, не проводячи експерименту.

У випадку, коли на результат досліду впливає низка факторів, урахувати які неможливо або дуже складно (крім того, ці фактори можуть змінюватися випадковим образом), скласти математичну модель, що прогнозує розвиток такого явища в детерміністському поданні неможливо. У такому випадку намагаються знайти у випадкових явищах ті або інші закономірності. Такі закономірності виявляються при масовому повторенні дослідів. Якщо їх вдається знайти, то випадкове явище є статистично однорідним. Якщо закономірності у явищі відсутні, тобто виявити їх не вдається, то таке явище є невизначеним і вимагає додаткового дослідження.

Одним з основних у теорії імовірностей є поняття випадкової події.

Випадкова подія – це усякий факт, що в результаті досліду може відбутися або не відбутися.

Випадкові події позначають великими буквами латинського алфавіту: $A=\{\text{влучення в мішень}\}$, $B=\{\text{прибуття трамвая на зупинку}\}$, $C=\{\text{поломка технічного пристрою}\}$, $D=\{\text{коротке замикання в мережі}\}$.

Дослідом називають відтворену сукупність умов, у яких може відбутися випадкова подія.

Імовірність випадкової події – це числова міра ступеню об'єктивної можливості появи певної події в результаті досліду. Імовірність події A позначається $P(A)$.

За одиницю виміру імовірності приймають імовірність достовірної події E , тобто такої, яка в результаті досліду обов'язково відбудеться:

$$P(E) = 1.$$

Протилежну достовірній подію називають неможливою і позначають \bar{E} . Імовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\bar{E}) = 0.$$

Відповідно імовірність будь-якої випадкової події A укладена між нулем та одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події

Імовірність випадкової події можна визначити за класичним методом тільки в обмеженому числі явищ, а саме, якщо наслідки досліду мають наступні властивості:

утворюють повну групу - якщо результатом однократного випробування є обов'язково один з можливих наслідків;

є рівноможливими - якщо за умовами симетрії досліду поява кожного з них однаково можлива;

є несумісними - якщо будь-які дві з них не можуть відбутися одночасно.

Якщо наслідки досліду мають перелічені властивості (утворюють повну групу, є несумісними та рівноможливими), то говорять, що дослід збігається до **схеми випадків**, або що має місце класична схема теорії імовірностей. У рамках цієї схеми можна точно підрахувати імовірність події, не проводячи випробувань. Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то імовірність події визначається як відношення кількості можливих наслідків досліду, що сприяють появі події A , до загальної кількості можливих наслідків досліду

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

де n - загальна кількість можливих наслідків досліду; m - кількість наслідків досліду, що сприяють появі події A .

Для підрахунку кількості всіх випадків n та кількості випадків m , що сприяють появі події A , часто використовують кількість сполучень з k елементів по s

$$C_k^s = \frac{k!}{s!(k-s)!},$$

де $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot k$, при цьому $0! = 1$.

Якщо події в досліді не збігаються до схеми випадків, то оцінку імовірності можна зробити тільки статистично. Спостерігаючи випадкові явища або проводячи випробування, визначають частоту появи певної події. При прове-

денні серії з n дослідів, у кожному з яких могла з'явитися або не з'явитися подія A , під частотою її появи розуміють відношення

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \quad (1.2)$$

де n - кількість проведених дослідів; m - кількість появ події A в n дослідах.

Чи можна вважати частоту появи події A її імовірністю? Результат кожного дослідів є випадковим, однак якщо спостережуване явище має статистичну однорідність, то при великій кількості дослідів частота події починає стабілізуватися й у границі прагне до імовірності події. Ця властивість стійкості частот, багаторазово перевірена експериментально, і є одною з найхарактерніших закономірностей, спостережуваних у випадкових явищах. Вона відома за назвою закону великих чисел. Бернуллі довів, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^*(A) = P(A). \quad (1.3)$$

Вираз (1.3) читають так: імовірність події A із збільшенням кількості дослідів n збігається за імовірністю до імовірності події A . Це означає, що зі збільшенням кількості дослідів n імовірність того, що частота події A відрізняється від імовірності цієї події зменшується.

Тема 2. Операції над подіями. Теорема теорії імовірностей. Основні формули теорії імовірностей

Оскільки в практичних умовах багаторазове відтворення дослідів надзвичайно утруднено, для визначення імовірностей одних випадкових подій за відомими імовірностями інших подій, що з ними пов'язані, використовують теорему теорії імовірностей: теорему додавання й теорему добутку.

Введемо визначення.

Сумою двох подій A та B називають подію C , що полягає у появі події A або події B або обох разом:

$$C = A + B.$$

Сума подій - логічна сума, її називають диз'юнкцією та позначають спеціальним знаком:

$$C = A \vee B.$$

Добутком двох подій A та B називають подію C , що полягає у спільній появі подій A та B :

$$C = A * B.$$

Добуток подій - логічний добуток, його називають кон'юнкцією і так само позначають спеціальним знаком:

$$C = A \wedge B.$$

Протилежними називають дві несумісних події A та \bar{A} , якщо вони складають повну групу.

Подію А називають **незалежною** від події В, якщо імовірність події А не змінюється залежно від того, відбулася подія В чи ні. Якщо ж імовірність події А залежить від того, чи відбулася подія, то такі події називають **залежними**.

Імовірність події А, обчислена за умови, що подія В мала місце, називають **умовною імовірністю** події А і позначають $P(A|B)$.

Розглянемо приклад. Нехай в урні три кулі, дві з яких білі, а третя - чорна. Одну за іншою з урни виймають дві кулі. Позначимо події

$A = \{\text{перша вийнята куля виявилася білою}\}$

$B = \{\text{друга вийнята куля виявилася білою}\}.$

Імовірність події В залежить від того, відбулася подія А чи ні. Якщо подія А відбулася, то імовірність події В

$$P(B/A) = \frac{1}{2}.$$

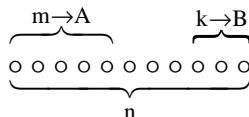
Якщо ж подія А не відбулася, то імовірність події В буде іншою: якщо першою виявилася вийнятою чорна куля, то $P(B/\bar{A}) = 1$.

Теорема додавання

Імовірність суми двох несумісних подій А і В дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (2.1)$$

Доведемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, в числі яких m сприяють появі події А і k - появі події В.



Оскільки подія С полягає в появі події А, якої сприяє m наслідків дослідів або події В, якої сприяє k наслідків, то події С сприяють $m+k$ наслідків дослідів. Тоді імовірність події С за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Слідства теореми додавання:

За методом математичної індукції (узагальнення) теорему додавання імовірностей можна розповсюдити на будь-яку кінцеву кількість несумісних подій:

$$C = \sum A_i$$

$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i).$$

Слідство 1. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх імовірностей дорівнює 1:

$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i) = 1. \quad (2.2)$$

Слідство 2. Сума імовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

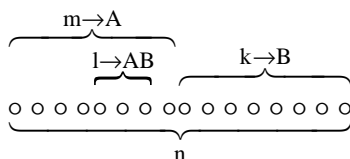
звідки імовірність будь-якої випадкової події:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

У випадку, коли дві події є сумісними, імовірність їх суми дорівнює сумі імовірностей цих подій мінус імовірність їх спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A * B) \quad (2.3)$$

Доведемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, в числі яких m сприяють появі події A , k - появі події B та l - появі події AB .



Оскільки подія C полягає в появі події A , якої сприяє m наслідків досліду або події B , якої сприяє k наслідків, то події C сприяють $m+k-l$ наслідків досліду. Тоді імовірність події C за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

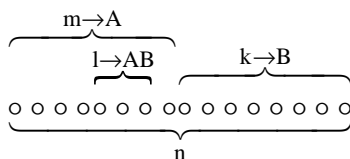
$$P(C) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема множення

Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність іншої, обчислену за умови, що перша відбулася:

$$P(A * B) = P(A) * P(B|A). \quad (2.4)$$

Доведемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, в числі яких m сприяють появі події A , k - появі події B та l - появі події AB .



Події AB сприяють l наслідків досліду:

$$P(AB) = \frac{l}{n}; \quad P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(B/A) = \frac{l}{m}; \quad P(B) = \frac{k}{n}; \quad P(A/B) = \frac{l}{k}.$$

Тоді імовірність події AB визначиться в такий спосіб:

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{m}{n} * \frac{l}{m} = P(A) * P(B/A).$$

Якщо події A і B незалежні, то умовна імовірність події B дорівнює безумовній імовірності цієї події,

$$P(B|A) = P(B).$$

Слідство. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(A * B) = P(A) * P(B) \quad (2.5)$$

Якщо маємо кілька незалежних подій:

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Формула повної імовірності

Формула повної імовірності є слідством двох теорем теорії імовірностей. Нехай передбачається проведення досліду, про умови протікання якого можна зробити N взаємовиключних припущень (гіпотез). Умови протікання досліду

(гіпотези) являють собою повну групу несумісних подій H_1, H_2, \dots, H_N , імовірності яких $P(H_i)$ відомі. Деяка випадкова подія A може з'явитися за будь-яки умови протікання досліду з різною імовірністю. Подамо подію A як суму несумісних подій:

$$A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_N A.$$

Застосовуючи теореми додавання та множення, дістанемо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(H_i A) = \sum_{i=1}^N P(H_i) P(A / H_i). \quad (2.6)$$

Таким чином, повна безумовна імовірність події A з урахуванням випадковості умов протікання досліду дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну імовірність події A при кожній з гіпотез.

Формула Бейеса (теорема гіпотез)

Ця формула дозволяє за відомими до проведення досліду (априорними) імовірностями гіпотез $P(H_i)$ та за результатом досліду (настання події A) визначити обчислені після досліду (апостеріорні) імовірності гіпотез $P(H_i | A)$.

За теоремою множення імовірність появи події A при i -й гіпотезі

$$P(H_i * A) = P(H_i) * P(A | H_i)$$

у чинність симетрії подій справедливо

$$P(H_i * A) = P(A) * P(H_i | A),$$

звідки дістанемо

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A / H_i)}{P(A)},$$

або, якщо підставити $P(A)$ з формули (2.6), дістанемо

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A / H_i)}{\sum P(H_i) * P(A / H_i)} \quad (2.7)$$

Таким чином, формула Бейеса дозволяє переоцінити імовірності гіпотез після того, як стає відомим результат досліду, в результаті якого відбулася подія A .

Формула Бернуллі

На практиці доводиться зіштовхуватися з такими задачами, які можна уявити у вигляді багаторазово повторюваних незалежних випробувань. Якщо імовірність появи події A в одному досліді та сама, то імовірність m появ події A в n дослідіх можна визначити за формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (2.8)$$

де $P_n(m)$ - імовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів;

C_n^m - кількість сполучень з n елементів по m ;

p - імовірність появи події A в одному досліді;

$q = 1 - p$ - імовірність не появи події A в одному досліді.

Користуючись формулою Бернуллі, можна дістати найімовірнішу кількість появ події А.

Найімовірнішою кількістю появи події А в n незалежних дослідах називають таку кількість, для якої імовірність перевищує або, принаймні, не менше за імовірність кожної з інших можливих кількостей появи події А. Для визначення найімовірнішої кількості користуються формулою:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \quad (2.9)$$

причому, m_0 може бути тільки цілим числом. Якщо np - ціле число, то $m_0 = np$.

Локальна теорема Лапласа

Локальна теорема Лапласа дає асимптотичну формулу, що дозволяє приблизно знайти імовірність появи подій рівно m разів в n дослідах, якщо кількість випробувань досить велика.

Якщо імовірність p появи події А в кожному випробуванні постійна й відрізняється від нуля та одиниці, то імовірність $P_n(m)$ того, що подія А з'явиться в n дослідах рівно m разів, приблизно дорівнює, і тим точніше, чим більше n, значенню функції

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (2.10)$$

де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, а значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ визначаються з довідкових таблиць. Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Лапласа

Якщо в повторних незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події А постійна й дорівнює p, необхідно обчислити імовірність того, що подія А з'явиться в n випробуваннях не менше m_1 і не більше m_2 разів, це можна зробити за допомогою інтегральної теореми Лапласа.

Якщо імовірність p настання події А в кожному випробуванні постійна й відрізняється від нуля та одиниці, то приблизно імовірність $P_n(m_1, m_2)$, того, що подія А з'явиться у випробуваннях від m_1 до m_2 разів,

$$P_n(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx, \quad (2.11)$$

де $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

При розв'язанні задач користуються спеціальними таблицями, тому що невизначений інтеграл (2.11) не виражається через елементарні функції. У довідкових таблицях приводяться значення інтеграла $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$. Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Таблиця містить значення функції $\Phi(x)$ тільки для $x \in [0; 5]$; для $x > 5$ приймають $\Phi(x) = 0,5$.

Таким чином, приблизно імовірність того, що подія А з'явиться в n незалежних дослідах від m_1 до m_2 разів.

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'). \quad (2.12)$$

Формула Пуассона

Якщо імовірність p настання події в окремому випробуванні близька до нуля, то навіть при великій кількості випробувань n, але при невеликому значенні добутку np одержувані за формулою Лапласа значення імовірностей $P_n(m)$ виявляються недостатньо точними й виникає потреба в іншій наближеній формулі.

Якщо імовірність p настання події А в кожному випробуванні постійна, але мала, кількість незалежних випробувань n досить велика, але значення добутку np залишається невеликим (не більше десяти), то імовірність того, що в цих випробуваннях подія А настане m разів, можна визначити за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \quad (2.13)$$

Тема 3. Поняття випадкової величини. Універсальні закони розподілу

Випадковою називають таку величину, що в результаті досліду може прийняти те або інше значення, невідомо заздалегідь, яке саме (наприклад, кількість очків, кількість пасажирів у трамваї, температура повітря, час напрацювання на відмову технічного пристрою). Випадкову величину позначають прописною літерою латинського алфавіту X, Y або Z, а будь-яке її значення - відповідною малою літерою x, y або z.

Розрізняють дискретні й безперервні випадкові величини.

Дискретною називають таку випадкову величину, кількість значень якої скінченна, або нескінченна, але рахункова (яка може приймати тільки окремі значення).

Безперервною називають таку випадкову величину, кількість значень якої нескінченна навіть на невеликому інтервалі.

Для повної характеристики випадкової величини необхідно знати всі можливі її значення та імовірності появи цих значень у результаті досліду.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє знаходити імовірності різних подій, пов'язаних з випадковою величиною, зокрема, імовірність того, що вона прийме якесь значення або потрапить у якийсь інтервал своїх значень.

Найпростішим законом розподілу є закон розподілу дискретної випадкової величини X, називаний **рядом розподілу**. Він є таблицею, у верхньому рядку

якої перелічені всі значення випадкової величини x_1, x_2, \dots, x_n у порядку їх зростання, а в нижньому - імовірності появи цих значень p_1, p_2, \dots, p_n :

x_1	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n

де $p_i = P\{X=x_i\}$.

Оскільки події $\{X=x_1\}, \{X=x_2\}, \dots, \{X=x_n\}$ несумісні й утворюють повну групу, сума їх імовірностей дорівнює одиниці $\sum p_i = 1$ (ця одиниця розподілена між значеннями X). Ряд розподілу можна задати й у вигляді графіка:

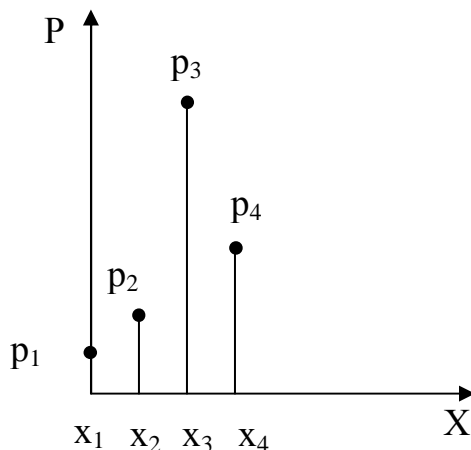


Рис. 3.1 – Графічна інтерпретація ряду розподілу

Найбільш загальною формою закону розподілу для всіх випадкових величин є функція розподілу.

Функція розподілу

Для характеристики як безперервних так і дискретних випадкових величин зручніше користуватися не імовірністю події $X=x_i$ (тому що значень x_i може бути багато), а імовірністю події $X < x$.

Функція розподілу випадкової величини X дорівнює імовірності того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x :

$$F(x) = P\{X < x\} \quad (3.1)$$

Геометрично функція розподілу – це імовірність того, що значення випадкової величини потрапить лівіше x_i .

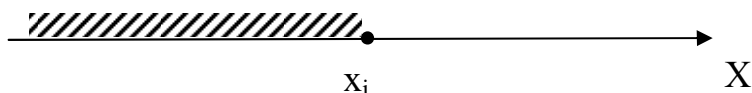


Рис. 3.2 – Розташування значень $X < x$

Функція розподілу дискретної випадкової величини є розривною, східчатою функцією, що має перегони в точках, що відповідають можливим значенням x_1, x_2, \dots, x_n випадкової величини X , які дорівнюють імовірностям p_1, p_2, \dots, p_n цих значень.

У випадку безперервної випадкової величини функція розподілу зазвичай має вигляд плавної кривої.

Щільність розподілу

Нехай ϵ безперервна випадкова величина X з функцією розподілу $F(x)$ (рис. 3.3).

Говорити про розподіл імовірностей між значеннями безперервної випадкової величини нема рації, тому що число її значень нескінченно навіть на невеликому інтервалі, й імовірність того, що безперервна випадкова величина прийме одне-єдине своє значення x_i дорівнює нулю. Тому, характеризуючи безперервну випадкову величину, завжди говорять про влучення її значень у той чи інший інтервал. З рисунка 3.3 видно, що імовірність влучення X в інтервал Δx_1 більша, ніж в інтервал Δx_2 , оскільки приріст функції розподілу $\Delta F(x_1) > \Delta F(x_2)$.

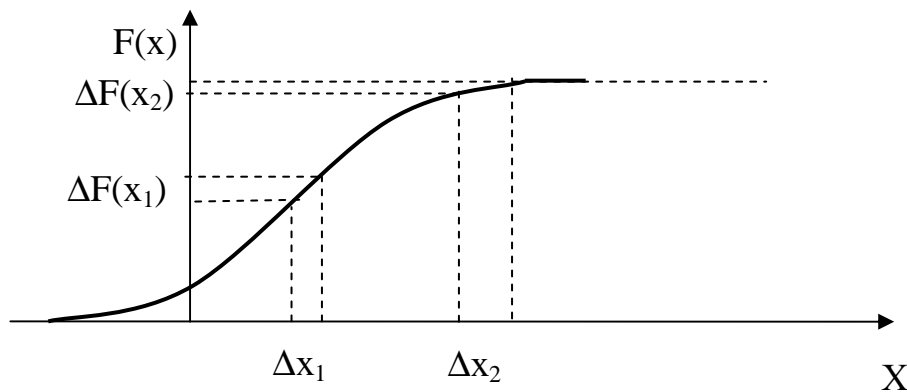


Рис. 3.3 – Функція розподілу безперервної випадкової величини

З математики відомо, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$.

Отже, закон розподілу імовірностей безперервних випадкових величин зручніше визначати завданням не функції розподілу $F(x)$, а щільності розподілу імовірностей $f(x)$, що є похідною від $F(x)$ за x :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (3.2)$$

Передбачається, що $F(x)$ безперервна й диференційована.

Щільністю розподілу випадкової величини X у точці x називають похідну функції розподілу X у цій точці.

На графіку щільності розподілу імовірність подається площею.

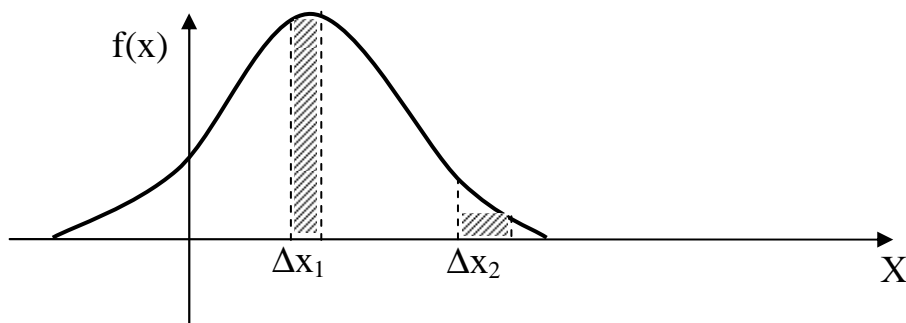


Рис. 3.4 – Графік щільності розподілу

Властивості щільності розподілу імовірностей:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$ як похідна неубутної функції.

2. Інтеграл від щільності розподілу в нескінченних межах дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

3. Імовірність влучення безперервної випадкової величини в інтервал (x_1, x_2)

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

4. Функція розподілу визначається за співвідношенням:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Функцію розподілу $F(x)$ іноді називають інтегральним законом розподілу, а щільність розподілу $f(x)$ - диференціальним законом розподілу.

Тема 4. Числові характеристики випадкової величини

Закон розподілу випадкової величини являє собою певну функцію, що цілком описує випадкову величину з імовірнісної точки зору, тобто є її вичерпною характеристикою й дозволяє визначати імовірності будь-яких подій, пов'язаних з випадковою величиною. Проте у багатьох практичних задачах потрібно отримати більш компактне уявлення про випадкову величину. Для теорії імовірностей та її застосування велику роль грають певні постійні числа, що одержані за певними правилами із законів розподілу випадкових величин та названі **числовими характеристиками** випадкової величини. Найважливішою числовою характеристикою випадкової величини є **математичне сподівання**.

Математичним сподіванням випадкової величини X називають суму добутків всіх можливих її значень на імовірності цих значень

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (4.1)$$

Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини, навколо якого групуються всі її можливі значення.

На практиці використовують ряд числових характеристик, які характеризують особливості розподілу випадкової величини. Такими характеристиками є так звані **моменти** або математичні сподівання випадкової величини. Розрізняють початкові α та центральні μ моменти.

Початковим моментом s -го порядку дискретної випадкової величини називають математичне сподівання s -го ступеня цієї величини

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i. \quad (4.2)$$

Для безперервної випадкової величини початковий момент s -го порядку

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx. \quad (4.3)$$

Вирази (4.2) та (4.3) можна об'єднати в один, користуючись знаком математичного сподівання M :

$$\alpha_s = M[X^s], \quad (4.4)$$

тобто початковим моментом s -го порядку випадкової величини називають математичне сподівання s -го ступеня цієї випадкової величини.

При $s = 1$ дістаємо перший початковий момент або математичне сподівання випадкової величини

$$\alpha_1 = M[X] = m_x. \quad (4.5)$$

На практиці іноді застосовують другий початковий момент α_2 :

$$\alpha_2 = M[X^2] \quad (4.6)$$

Центральним моментом s -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання s -го ступеня центрованої величини X . Під центрованою розуміють відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$X^0 = X - m_x$$

Центральний момент s -го порядку випадкової величини X виражається формулою

$$\mu_s = M[X^0{}^s] \quad (4.7)$$

Для дискретної випадкової величини X :

$$\mu_s = M[X^0{}^s] = \sum_{i=1}^n x_i^0{}^s p_i = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^s p_i \quad (4.8)$$

Для безперервної випадкової величини X :

$$\mu_s = M[X^0{}^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0{}^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx \quad (4.9)$$

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$$M[X^0] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Центральний момент другого порядку для дискретної випадкової величини X :

$$\mu_2 = M[X^0{}^2] = \sum_{i=1}^n x_i^0{}^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = D_x \quad (4.10)$$

Для безперервної випадкової величини:

$$\mu_2 = M[X^0{}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0{}^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = D_x \quad (4.11)$$

Другий центральний момент називають **дисперсією**. Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання. У випадку, якщо це розсіювання відсутнє, величина D_x дорівнює нулю. Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно. Тому як характеристику розсіювання часто використовують середнє квадратичне відхилення X :

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (4.12)$$

Центральні моменти більш високого порядку можуть характеризувати ступінь асиметрії розподілу випадкової величини, крутість кривої розподілу та. ін.

Властивості числових характеристик

1. Математичне сподівання не випадкової величини дорівнює їй самій

$$M[c] = \sum_{i=1}^n c p_i = c \sum_{i=1}^n p_i = c. \quad (4.13)$$

2. Математичне сподівання добутку не випадкової величини C та випадкової величини X дорівнює добутку цієї не випадкової величини та математичного сподівання випадкової величини X :

$$M[cX] = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c \sum_{i=1}^n x_i p_i = cM[X], \quad (4.14)$$

тобто не випадкову величину C можна виносити за знак математичного сподівання.

3. Дисперсія не випадкової величини C дорівнює нулю:

$$D[c] = M[c^2] = M[(c - m_c)^2] = M[0] = 0. \quad (4.15)$$

4. Дисперсія добутку не випадкової величини C та випадкової величини X дорівнює добутку квадрата цієї не випадкової величини на дисперсію випадкової величини X :

$$D[cX] = M[c^2 X^2] = c^2 M[X^2] = c^2 D[X], \quad (4.16)$$

тобто не випадкову величину можна виносити з-під знака дисперсії, звівши її у квадрат.

Тема 5. Найважливіші закони розподілу випадкових величин

Біноміальний закон розподілу

Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу (розподіл Бернуллі), якщо її можливі значення: 0, 1, ..., n, а відповідні імовірності визначаються співвідношенням:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (5.1)$$

де p - імовірність «успіху» в одному досліді, $0 < p < 1$; $q = 1 - p$.

Таким чином, розподіл залежить від двох параметрів n та p .

Для визначення числових характеристик випадкової величини, яка має біноміальний закон розподілу, введемо поняття **виробляючої функції**.

Нехай дискретна випадкова величина X приймає невід'ємні цілочисельні значення $0, 1, 2, \dots, k$ з імовірностями p_1, p_2, \dots, p_k ($p_k = P\{X=k\}$).

Виробляючою функцією для випадкової величини X називають вираз виду:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad (5.2)$$

де z – довільний параметр, $0 < z \leq 1$. Коефіцієнти p_k при z^k у виробляючій функції дорівнюють імовірностям того, що випадкова величина X прийме значення k . Вираз (5.2) залишається справедливим і якщо кількість значень X скінченна, тому що при $k > n$ імовірності p_k обертаються на нуль.

При $z=1$ виробляюча функція дорівнює одиниці:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \quad (5.3)$$

Візьмемо похідну за z від виробляючої функції:

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}.$$

Нехай $z=1$, тоді $\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$, тобто похідна за z від виробляючої функції при $z=1$ є сумою добутків значень X на їх імовірності, а отже є математичним сподіванням X .

$$M[X] = m_x = \varphi'(1). \quad (5.4)$$

Візьмемо другу похідну від $\varphi(z)$:

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}.$$

Нехай $z=1$, одержимо $\varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$. Перший доданок – другий початковий момент α_2 , а другий – математичне сподівання X . Дістанемо вираження другого початкового моменту α_2 .

$$\alpha_2 = \varphi''(1) + \varphi'(1). \quad (5.5)$$

Тобто другий початковий момент дорівнює сумі першої та другої похідних виробляючої функції при $z=1$.

Визначимо числові характеристики випадкової величини X , розподіленої за біноміальним законом. Запишемо виробляючу функцію:

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^n P_m z^m = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} z^m.$$

Такий самий вигляд має n -я ступінь бінома:

$$\varphi(z) = (q + pz)^n. \quad (5.6)$$

Візьмемо похідну від виразу (5.6):

$$\varphi'(z) = np(q + pz)^{n-1}$$

та підставимо $z=1$, дістанемо математичне сподівання X :

$$m_x = \varphi'(1) = np(q + p)^{n-1} = np(1)^{n-1} = np. \quad (5.7)$$

Для обчислення дисперсії знайдемо другий початковий момент:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \varphi''(1) + m_x \\ \varphi''(z) &= n(n-1)p^2(q+pz)^{n-2}; \quad \varphi''(1) = n(n-1)p^2 \\ \alpha_2 &= n(n-1)p^2 + np. \\ D_x &= \alpha_2 - m_x^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq.\end{aligned}$$

Таким чином, числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом мають вигляд:

$$m_x = np; \quad D_x = npq; \quad \sigma_x = \sqrt{npq}. \quad (5.8)$$

Закон розподілу Пуассона

Можна показати, що за $n \rightarrow \infty$ границя виразу біноміального розподілу дорівнює

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Отримана формула виражає закон розподілу Пуассона. Таким чином, коли імовірність p появи події A в кожному окремому досліді мала, а кількість дослідів n велика, біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини можна приблизно замінити законом Пуассона:

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \quad (5.9)$$

Закон розподілу Пуассона визначається одним параметром $a = np$, що є одночасно математичним сподіванням і дисперсією випадкової величини X , розподіленої за законом Пуассона. Розподіл Пуассона з параметром $a = np$ можна приблизно застосовувати замість біноміального, коли кількість дослідів n дуже велика, а імовірність p дуже мала, тобто в кожному окремому досліді подія A з'являється вкрай рідко. Розподіл Пуассона часто використовують, коли мають справу з числом подій, що з'являються на проміжку часу. Наприклад, число дефектів на новій ділянці шосе довжиною 10 км, число місць витoku води на 100 км водопроводу, число поломок надійного технічного пристрою за певний період часу, наприклад, за рік.

Експонентний закон розподілу

Розглянемо потік однорідних подій, що ідуть одна за одною у випадкові моменти часу. Його можна розглядати як послідовність точок на числовій осі, що показана на рис. 5.1.

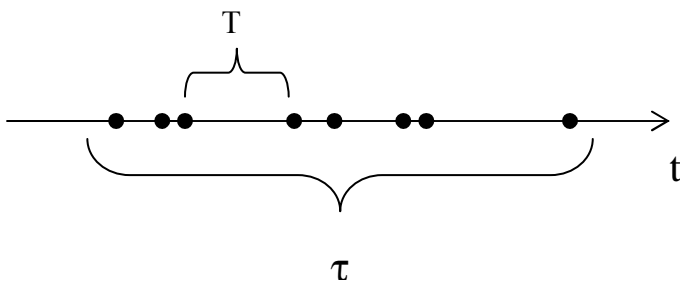


Рис. 5.1 – Послідовність точок на числовій осі

Якщо середнє число подій λ на ділянці часу довжиною τ залежить тільки від довжини ділянки, тобто постійне, не залежить від числа подій, що потрапляють на інші ділянки, і події в потоці ідуть по одній, то такий потік називають **найпростішим**, або **стаціонарним пуассоновським потоком**.

Потік подій характеризується двома випадковими величинами: X - кількість подій, що потрапляють на інтервал часу τ і T - проміжок часу між двома випадковими подіями в потоці. Помітимо, що X є дискретною випадковою величиною, а T - безперервною.

Кількість подій, що надходять на дільницю часу τ у такому потоці має закон розподілу Пуассона (5.9), де $a = \lambda * \tau$ - математичне сподівання кількості подій; λ - інтенсивність потоку подій (кількість подій на одиницю часу); τ - довжина дільниці часу.

Імовірність того, що на дільниці часу τ не відбудеться жодної події за законом Пуассона:

$$P(0) = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-\lambda * \tau}. \quad (5.10)$$

Отримана імовірність стосовно випадкової величини проміжку часу між двома сусідніми подіями T , це імовірність того, що він опиниться більше деякого поточного t : $P\{T > t\}$. Тоді імовірність того, що T опиниться менше за деяке поточне t ($P\{T \leq t\}$), є за визначенням функцією розподілу T і визначиться як імовірність протилежної події:

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - P\{T \geq t\} = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (5.11)$$

Щільність розподілу T визначимо як похідну функції розподілу $F(t)$:

$$f(t) = d(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (5.12)$$

Такий закон розподілу називають **експонентним**.

Експонентний розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування та у теорії надійності.

Визначимо числові характеристики випадкової величини, розподіленої за експонентним законом:

$$m_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt.$$

Проводячи інтегрування вроздріб, врахуємо, що при $t \rightarrow \infty \exp\{-t\}$ прагне до нуля швидше, ніж зростає будь-який ступінь t , дістанемо:

$$m_x = 1/\lambda. \quad (5.13)$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за експонентним законом, зворотно параметру розподілу λ .

Визначимо дисперсію за формулою:

$$D_t = \alpha_2 - m_t^2 = \lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (5.14)$$

звідки середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = 1/\lambda, \quad (5.15)$$

де λ - параметр розподілу (середня кількість подій на одиницю часу).

Знайдемо імовірність влучення випадкової величини, що має експонентний розподіл, в інтервал значень (α, β) . Нагадаємо, що ця імовірність

дорівнює приростові функції розподілу на інтервалі (α, β) . З формули (5.11) маємо $F(\alpha) = 1 - e^{-\alpha t}$, $F(\beta) = 1 - e^{-\beta t}$, тоді

$$P\{\alpha \leq t \leq \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda \beta} - 1 + e^{-\lambda \alpha} = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta} \quad (5.16)$$

Нормальний закон розподілу імовірностей

Цей закон ще називають законом Гауса, оскільки був запропонований ним при дослідженні помилок точних вимірювань (помітимо, що помилки грубих вимірювань мають інший розподіл імовірностей). Закон базується на двох посилках:

- 1) помилки різного знака, однакові за величиною, мають однакову імовірність;
- 2) малі помилки імовірніші, ніж великі (промахи).

Цим посилкам відповідає горбоподібна крива, симетрична щодо середнього значення помилки вимірювання (рис. 5.2.).

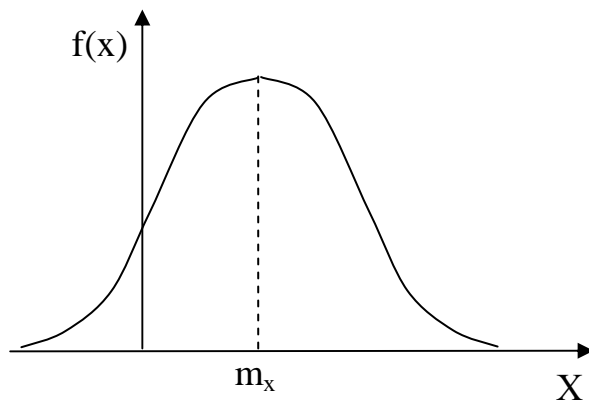


Рис. 5.2 – Крива нормального розподілу

Отримана крива апроксимується виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (5.17)$$

Звідси видно, що нормальний закон розподілу визначається двома параметрами: m_x та σ_x .

На практиці закон нормального розподілу зустрічається дуже часто, тому що існує велика кількість нормально розподілених випадкових величин.

Якщо відомі параметри m_x та σ_x , то з сімейства всіх кривих нормального розподілу виділяють одну з певною щільністю.

Імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини в інтервал значень (α, β) дорівнює інтегралу від щільності розподілу в межах від α до β , але оскільки інтеграл від $f(x)$ не береться в елементарних функціях, для визначення імовірностей, пов'язаних з нормально розподіленою випадковою величиною, користуються функцією Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (5.18)$$

значення якої наведені у довідкових таблицях.

Імовірність влучення випадкової величини X на ділянку значень (α, β) виражається через функцію Лапласа формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right) \quad (5.19)$$

При обчисленні імовірностей користуються наступними властивостями функції Лапласа:

- 1) при $x=0$ $\Phi(x)=0$;
- 2) при $x=\infty$ $\Phi(x)=0,5$;
- 3) при $x=-\infty$ $\Phi(x)=-0,5$;
- 4) функція $\Phi(x)$ є непарною функцією, тобто $\Phi(-x)=-\Phi(x)$

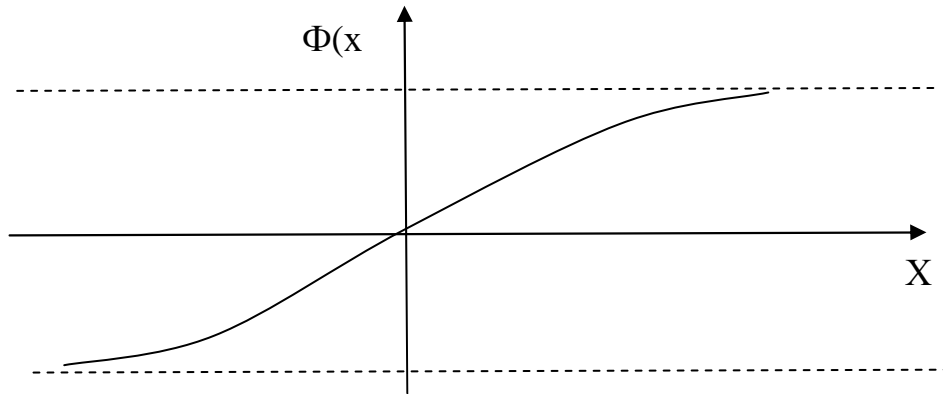


Рис. 5.3 – Крива функції Лапласа

Отже, всі можливі значення функції Лапласа належать інтервалу $(-0,5; +0,5)$, причому при $|x| > 4$ можна вважати, що $\Phi(x) \approx \pm 0,5$.

Скористаємося формулою (5.16) та визначимо функцію розподілу для випадкової величини, розподіленої нормально:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) + 0,5. \quad (5.20)$$

Оскільки нормальний розподіл є симетричним, зазвичай уявляє інтерес імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на дільницю значень, симетричну щодо її математичного сподівання (рис 5.4):

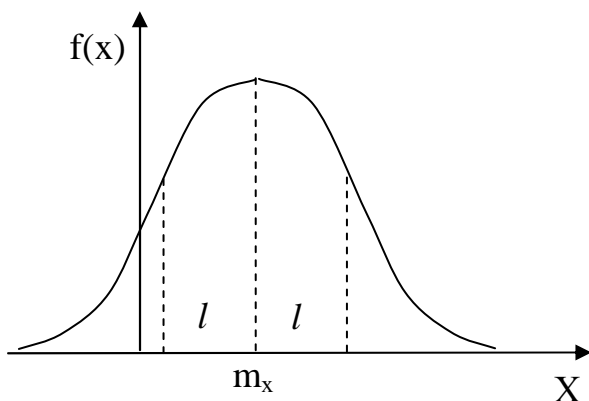


Рис. 5.4 – Інтервал, симетричний щодо математичного сподівання

$$P(|x - m_x| < l).$$

Для її визначення скористаємося формулою (5.19).

$$\begin{aligned} P\{|x - m_x| < l\} &= P\{m_x - l < X < m_x + l\} = \\ &= \Phi\left(\frac{m_x + l - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - l - m_x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right). \end{aligned}$$

Покладемо тепер $l = \sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < \sigma\} = 2 * \Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 * \Phi(1) = 0,68.$$

Отже, 68 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать в інтервалі $(m_x \pm \sigma_x)$.

Нехай $l = 2\sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < 2\sigma\} = 2 * \Phi\left(\frac{2\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 * \Phi(2) = 0,95.$$

Отже 95% значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать в інтервалі $(m_x \pm 2\sigma_x)$.

Якщо $l = 3\sigma_x$, то:

$$P\{|x - m_x| < 3\sigma\} = 2 * \Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 * \Phi(3) = 0,997.$$

Тобто 99,7% значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать в інтервалі $(m_x \pm 3\sigma_x)$.

Цю властивість називають «правилом трьох сигм».

Поняття про центральну граничну теорему

Центральна гранична теорема - це загальна назва групи теорем, щодо законів розподілу суми випадкових величин, зміст яких збігається до наступного:

закон розподілу суми незалежних випадкових величин наближається до нормального закону розподілу за необмежене збільшення кількості доданків, якщо всі величини мають кінцеві математичні сподівання й дисперсії й жодна з величин за значенням різко не відрізняється від інших.

Ознайомимось з двома теоремами.

Теорема 1. Якщо незалежні X_1, X_2, \dots, X_n мають той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією D , то за необмежене збільшення n закон розподілу суми $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ необмежено наближається до нормального.

Теорема 2 (центральна гранична теорема Ляпунова). Якщо випадкова величина $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, де вплив кожного з доданків на всю суму рівномірно малий, то величина Y має розподіл, близький до нормального, і тим ближче, чим більше n .

Дослід показує, що закон розподілу суми незалежних випадкових величин, порівняних за своїм розсіюванням, досить швидко наближається до нормального. Вже при кількості доданків порядку десяти закон розподілу суми можна замінити нормальним. При цьому коштовно те, що закони розподілу випадкових величин, які додаються, можуть бути будь-якими, заздалегідь невідомими.

Багато випадкових величин можна розглядати як суму незалежних доданків. Наприклад, помилки вимірювань, відхилення розмірів деталей, обсяг продаж певного товару, обсяг прибутку від реалізації, валютні курси та ін.

Якщо є доданки X_i , що роблять переважний вплив на величину Y , то робити ствердження про нормальний розподіл Y не можна. У цьому випадку закон розподілу Y буде визначатися композицією законів розподілу доданків, вплив яких на Y великий.

Закон рівномірної щільності

Безперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на дільниці від α до β , якщо її щільність розподілу на цій дільниці постійна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a, b); \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b) \end{cases} \quad (5.21)$$

Наприклад, помилка X при грубому вимірюванні, яка може приймати з постійною щільністю імовірності будь-яке значення між двома сусідніми цілими діленнями. Грубий вимір відрізняється від точного в тім, що результат грубих вимірів при повторенні завжди той самий; при точному ж вимірі - результат від разу до разу змінюється. Іншим прикладом рівномірного розподілу є абсциса навмання поставленої точки на відрізку $[a, b]$.

Визначимо числові характеристики випадкової величини, розподіленої рівномірно.

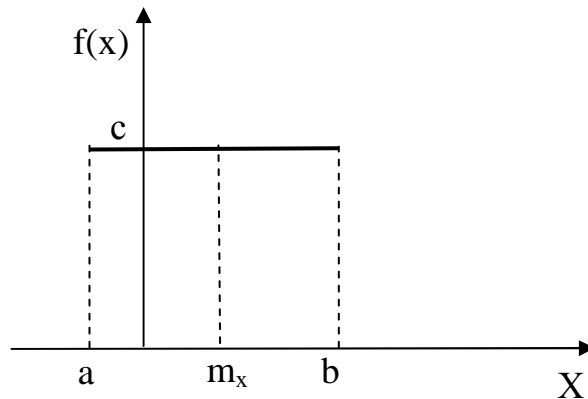


Рис. 5.5 – Щільність рівномірного розподілу

Математичне сподівання:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} * \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b+a}{2} \quad (5.22)$$

Дисперсія:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (5.23)$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (5.24)$$

Визначимо імовірність влучення значень рівномірно розподіленої випадкової величини на інтервал (α, β) :

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a} \quad (5.25)$$

Функція рівномірного розподілу:

$$F(x) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x - \alpha}{b-a}. \quad (5.26)$$

Тема 6. Система випадкових величин. Закони розподілу та числові характеристики системи

Багатомірна випадкова величина

При вивченні випадкових явищ іноді доводиться використовувати дві, три й більше випадкових величин. Спільний розгляд двох або кількох випадкових величин призводить до поняття системи випадкових величин. Систему кількох випадкових величин X, Y, \dots, W позначають (X, Y, \dots, W) і називають **багатомірною випадковою величиною**. При вивченні багатомірної випадкової величини недостатньо вивчити окремо випадкові величини, які її складають, а необхідно враховувати також зв'язки між цими величинами.

Найбільше практичне значення має система двох випадкових величин. Для характеристики системи двох випадкових величин використовують закони розподілу системи й числові характеристики системи.

Функція розподілу системи двох випадкових величин

Функція розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) дорівнює імовірності того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x і випадкова величина Y прийме значення, менше за y :

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} \quad (6.1)$$

Властивості функції розподілу системи:

1. Функція розподілу - неубутна функція, тобто

$$\begin{aligned} F(x_2, y) &\geq F(x_1, y), & \text{якщо } x_2 > x_1. \\ F(x, y_2) &\geq F(x, y_1), & \text{якщо } y_2 > y_1. \end{aligned}$$

$$2. F(-\infty, -\infty) = 0.$$

$$3. F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Щільність розподілу системи двох випадкових величин

Щільність розподілу імовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) $f(x, y)$ є другою змішаною похідною від $F(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (6.2)$$

Тут припускається, що $F(x, y)$ безперервна та двічі диференційована. Властивості щільності розподілу імовірностей:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x, y) \geq 0$;
2. Подвійний інтеграл від щільності розподілу в нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Числові характеристики системи випадкових величин

Початковим моментом порядку k, s системи двох випадкових величин називають математичне сподівання добутку випадкових величин X, Y у ступені k та s :

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s] \quad (6.3)$$

Відповідно центральним моментом порядку k, s системи випадкових величин (X, Y) називають математичне сподівання добутку центрованих величин X, Y у ступені k та s :

$$\mu_{k,s} = M[X^0 Y^0 X^k Y^s] \quad (6.4)$$

Для опису системи двох випадкових величин окрім математичних сподівань та дисперсій X та Y використовують кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. Кореляційним моментом є другий змішаний центральний момент:

$$\mu_{x,y} = M[X^0 Y^0 X Y] = K_{xy} \quad (6.5)$$

Для дискретної випадкової величини K_{xy} визначається за формулою:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (6.6)$$

де $p_{ij} = P\{X=x_i|Y=y_j\}$ – умовна імовірність, тобто імовірність того, що X прийме значення x_i за умови, що Y прийме значення y_j .

Для безперервної випадкової величини:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy \quad (6.7)$$

Якщо події $P\{X=x_i\}$ і $P\{Y=y_j\}$ незалежні, то імовірність їх спільної появи за теоремою добутку дорівнює

$$p_{ij} = P\{X=x_i\} * P\{Y=y_j\} = p_i * p_j.$$

Тоді для кореляційного моменту справедливий вираз:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{j=1}^m y_j p_j = 0,$$

тому що співмножники є центральними моментами першого порядку випадкових величин X і Y . Отже, кореляційний момент є характеристикою зв'язку між величинами X та Y , і у випадку незалежних X та Y він дорівнює нулю.

Як другий змішаний центральний момент кореляційний момент містить також і розсіювання випадкових величин X та Y відносно одна одної. Тому він не може характеризувати тісноту зв'язку між X та Y . Для визначення тісноти зв'язку між X та Y використовують коефіцієнт кореляції r_{xy} , який визначають за формулою:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (6.8)$$

Переконаємося в тому, що r_{xy} характеризує ступінь тісноти лінійного зв'язку між двома випадковими величинами. Нехай випадкова величина Y функціонально (жорстко) залежить від випадкової величини X , причому залежність ця лінійна:

$$Y = a + bX.$$

Визначимо математичне сподівання

$$M[Y] = M[a + bX] = \sum (ax_i + b)p_i = a \sum x_i p_i + \sum b p_i = a[X] + b.$$

Знайдемо дисперсію:

$$\begin{aligned} D[Y] &= M[(Y - m_Y)^2] = M[(Y - m_Y)^2] = M[Y^2 - 2m_Y Y + m_Y^2] = \\ &= M[(a + bX)^2 - 2(a + bX)m_Y + m_Y^2] = M[a^2(X - m_X)^2] = a^2 D_X, \end{aligned}$$

а середнє квадратичне відхилення $\sigma_Y = |a| \sigma_X$.

Визначимо коефіцієнт кореляції для жорстко пов'язаних X та Y , для чого виразимо $\overset{\circ}{Y}$ через $\overset{\circ}{X}$: $\overset{\circ}{Y} = Y - m_Y = aX + b - am_X - b = a(X - m_X) = a \overset{\circ}{X}$, тоді кореляційний момент дорівнюватиме

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{Y} \overset{\circ}{X}] = [a \overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X}] = a D_X,$$

а коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a D_X}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a \sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a}{|a|}.$$

Отже, якщо зв'язок функціональний, то коефіцієнт кореляції дорівнює 1, причому

$$r_{xy} = \begin{cases} -1 & \text{при } a < 0 \\ +1 & \text{при } a > 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

У загальному випадку коефіцієнт кореляції лежить у межах $-1 \leq r_{xy} \leq +1$ і дорівнює нулю, якщо X та Y незалежні.

Поняття **корельованості** та **залежності** двох випадкових величин різні. Дві *корельовані* випадкові величини обов'язково залежні. Дві *залежні* випадкові величини необов'язково корельовані.

Функції випадкових величин

Функції однієї або кількох випадкових величин доводиться розглядати, коли аргументом певної функції Y є система випадкових величин (X_1, X_2, \dots, X_n) , закон розподілу яких відомий. Функція Y є випадковою величиною, закон розподілу якої треба визначити. У більшості задач для визначення числових характеристик функції кількох випадкових величин досить знати тільки числові характеристики аргументів.

1. Математичне сподівання суми двох залежних або незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M[X + Y] = \sum (x_i + y_i) p_i = \sum x_i p_i + \sum y_i p_i = M[X] + M[Y]. \quad (6.10)$$

За методом математичної індукції (узагальнення) дістанемо:

$$M[\sum X_i] = \sum M[X_i],$$

Математичне сподівання суми n випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань.

2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин X та Y дорівнює добутку їх математичних сподівань плюс кореляційний момент. Запишемо вираз для кореляційного моменту:

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{Y} \overset{\circ}{X}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - M[Xm_y] - M[Ym_x] + M[m_x m_y] = \\ = M[XY] - m_x m_y - m_y m_x + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y,$$

звідки дістанемо

$$M[XY] = M[X] * M[Y] + K_{xy}. \quad (6.11)$$

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, математичне сподівання добутку дорівнює добутку їх математичних сподівань.

3. Дисперсія суми двох випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[X+Y] = M[((X+Y)-M(X+Y))^2] = \\ = M[X^2 + 2XY + Y^2 - 2(X+Y)M(X+Y) + M^2(X+Y)] = \\ = M[X^2 + 2XY + Y^2] - 2M(X+Y)M(X+Y) + M^2(X+Y) = \\ = M[X^2 + 2XY + Y^2] - (M[X] + M[Y])^2 = \\ = M[X^2] + M[Y^2] - M^2[X] - 2M[X]*M[Y] - M^2[Y] = \\ = D[X] + D[Y] + 2M[XY] - 2M[X]M[Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

Отже, дисперсія суми двох випадкових величин X та Y дорівнює сумі їх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \quad (6.12)$$

Якщо X та Y - незалежні випадкові величини, то дисперсія їх суми дорівнює сумі їх дисперсій, тоді сума n незалежних випадкових величин:

$$D[\Sigma X_i] = \Sigma D[X_i],$$

звідки середнє квадратичне відхилення суми:

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\Sigma \sigma_i^2}.$$

4. Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин X та Y визначається за формулою

$$D[XY] = D[X]*D[Y] + M[X]^2 D[Y] + M[Y]^2 D[X] \quad (6.13)$$

Тема 7. Закон великих чисел

Принцип практичної впевненості.

Формулювання закону великих чисел

Якщо подія має дуже малу імовірність (відмінну від нуля), то в одиничному випробуванні ця подія може наступити й не наступити. Але так міркуємо ми тільки теоретично, а на практиці вважаємо, що подія, яка має малу імовірність, не наступить, і тому нехтуємо нею. Однак, у рамках математичної теорії не можна відповісти на запитання, якою повинна бути верхня границя імовірності, щоб можна було назвати «практично неможливими» події, імовірності яких не будуть перевищувати знайденої верхньої границі. Нехай, наприклад,

робітник виготовляє на верстаті 100 виробів, з яких один в середньому виявляється бракованим. Очевидно, що імовірність браку дорівнює 0,01, але нею можна зневажити й вважати робітника непоганим фахівцем. Але якщо будівельники будуть будувати будинки так, що з 100 будинків (у середньому) в одному будинку буде мати місце руйнування даху, то навряд чи можна зневажити імовірністю такої події. Таким чином, у кожному окремому випадку варто виходити з того, наскільки важливі наслідки в результаті настання події.

Імовірність, якою можна зневажити в даному дослідженні, називається рівнем значущості.

Сформулюємо принцип практичної впевненості: «Якщо випадкова подія має малу імовірність (наприклад, $p < 0,01$), то при одиничному випробуванні можна практично вважати, що ця подія не відбудеться, а якщо подія має імовірність, близьку до одиниці ($p > 0,99$), то практично при одиничному випробуванні можна вважати, що ця подія відбудеться напевно».

Основною закономірністю масових випадкових явищ є властивість усталеності середніх результатів. У широкому значенні під «законом великих чисел» розуміють відому з глибокої стародавності властивість усталеності масових випадкових явищ, що полягає в тому, що середній результат великої кількості випадкових явищ практично перестає бути випадковим і може бути передбачений з достатньою певністю.

У вузькому значенні під «законом великих чисел» розуміють сукупність теорем, які встановлюють факт наближення середніх характеристик явища до певних постійних величин у результаті великої кількості спостережень. Розглянемо деякі з них.

1. Лема Маркова. Якщо випадкова величина X не приймає від'ємних значень, то для будь-якого позитивного числа справедлива нерівність:

$$P\{X > \alpha\} \leq \frac{M[X]}{\alpha} \quad (7.1)$$

Доказ.

1) нехай X — дискретна випадкова величина, задана рядом розподілу, причому $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n

Всі значення випадкової величини розіб'ємо на дві групи. До першої групи віднесемо значення, менші α (нехай це будуть x_1, x_2, \dots, x_k), до другої - всі інші значення більші або рівні α ($x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$).

Звісно, що математичне сподівання дискретної випадкової величини виражається за формулою:

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k + x_{k+1} p_{k+1} + \dots + x_n p_n.$$

Відкинемо в правій частині формули перші k доданків. Оскільки $p_i > 0$, $x_i \geq 0$ і, крім того, при $x_i \geq \alpha$, $i \geq k+1$, буде мати місце наступна нерівність: $M[X] \geq x_{k+1} p_{k+1} + \dots + x_n p_n \geq \alpha(p_{k+1} + \dots + p_n)$.

З того, що

$$p_{k+1} + \dots + p_n = P\{X=x_{k+1}\} + \dots + P\{X=x_n\} = P\{X \geq \alpha\},$$

слідкує, що:

$$M[X] \geq \alpha P\{X \geq \alpha\}.$$

Розділимо обидві частини останньої нерівності на α та дістанемо нерівність (7.1).

2) нехай X - безперервна випадкова величина. Оскільки за умовою X не приймає невід'ємних значень, то її щільність імовірності $f(x) = 0$ при усіх $x < 0$. Тому

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)dx \geq \alpha \int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx = \alpha P\{X \geq \alpha\},$$

розділимо на $\geq \alpha$, дістанемо нерівність (7.1). Лему доведено.

2. Нерівність Чебишева. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше деякого додатного числа ε , обмежена знизу величиною

$$1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{або} \quad P\{|X - M[X]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \quad (7.2)$$

Доказ.

Нехай маємо випадкову величину $(X - M[X])^2$. Оскільки вона приймає тільки додатні значення, до неї можна вжити лему Маркова, покладаючи в ній $\alpha = \varepsilon^2$, дістанемо:

$$P\{(X - M[X])^2 < \varepsilon^2\} \geq 1 - \frac{M[(X - M[X])^2]}{\varepsilon^2}.$$

Зазначимо, що $M[(X - M[X])^2] = D[X]$, а також урахуємо, що імовірність $P\{(X - M[X])^2 < \varepsilon^2\}$ дорівнює імовірності $P\{|X - M[X]| < \varepsilon\}$. На цій підставі можемо записати:

$$P\{|X - M[X]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

3. Теорема Чебишева. При необмеженому збільшенні числа n незалежних випробувань середня арифметична спостережуваних значень випадкової величини сходиться за імовірністю до її математичного сподівання, тобто для любого додатного ε

$$P\{|\bar{X} - M[X]| < \varepsilon\} = 1. \quad (7.3)$$

Ця теорема встановлює зв'язок між середньою арифметичною \bar{X} спостережуваних значень випадкової величини X і її математичним сподіванням $M[X]$.

Доказ.

Спостережувані значення X (x_1, x_2, \dots, x_n) у силу незалежності дослідів можна розглядати як незалежні випадкові величини, що мають однаковий розподіл (таке ж, як в X) з однаковими параметрами – математичним сподіванням

$a = M[X]$ і дисперсією $D[X]$. За властивостями математичного сподівання й дисперсії можна записати:

$$\begin{aligned} M[\bar{X}] &= M\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n} M[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \frac{1}{n} (M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]) = \\ &= \frac{1}{n} (a + a + \dots + a) = \frac{1}{n} na = a. \\ D[\bar{X}] &= D\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \frac{1}{n^2} (D[X_1] + D[X_2] + \dots + D[X_n]) = \\ &= \frac{1}{n^2} nD[X] = \frac{D[X]}{n}. \end{aligned}$$

Скористаємося нерівністю Чебишева для випадкової величини X та підставимо у нього отримані параметри:

$$P\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[X]}{n\varepsilon^2} \quad (7.4)$$

Якщо тепер в отриманій нерівності взяти як завгодно мале додатне ε та необмежено збільшити n , дістанемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{D[X]}{n\varepsilon^2}\right) = 1,$$

що доводить теорему Чебишева.

З теореми Чебишева випливає важливий практичний висновок: невідоме значення математичного сподівання випадкової величини можна замінити середнім арифметичним значенням, що отримане за досить великою кількістю дослідів. При цьому, чим більше проведено дослідів, тим з більшою імовірністю можна чекати, що пов'язана з цією заміною помилка $(\bar{X} - a)$ не перевершує задану величину ε . При відомому значенні дисперсії $D[X]$, наприклад, за заданим значенням імовірності $P\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\}$ та максимальній припустимій помилці ε , визначити число необхідних дослідів n ; або за заданими P та n визначити ε ; а також, за заданими ε та n визначити границю імовірності події $|\bar{X} - a| < \varepsilon$.

4. Теорема Бернуллі. При необмеженому зростанні числа незалежних випробувань n відносна частота $\frac{m}{n}$ появи події A збігається за імовірністю до імовірності P , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1, \quad (7.5)$$

За допомогою цієї теореми встановлюється зв'язок між відносною частотою події та її імовірністю. Її було доведено Я. Бернуллі (опублікована в 1713р.), що поклало початок теорії імовірностей як науки.

Доказ.

Відносна частота $\frac{m}{n}$ є випадковою величиною, а отже характеризується математичним сподіванням та дисперсією:

$$M\left[\frac{m}{n}\right] = p; \quad D\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{pq}{n}.$$

Запишемо нерівність Чебишева для випадкової величини $\frac{m}{n}$:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left[\frac{m}{n}\right]}{\varepsilon^2}.$$

Остаточно дістанемо:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \quad (7.6)$$

Яким би малим не було число ε , при $n \rightarrow \infty$ величина дробу $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$, а $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow 1$.

З теореми Бернуллі випливає, що при досить великій кількості випробувань відносна частота $\frac{m}{n}$ появи події практично втрачає свій випадковий характер, наближаючись до постійної величини P — імовірності цієї події. У цьому полягає принцип практичної впевненості.

Незважаючи на те, що при необмеженому зростанні числа незалежних випробувань різниця $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ може виявитися як завгодно малою, все ж таки не можна казати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P$. Таке твердження було б невірним, тому що в цьому питанні не виконуються необхідні умови, що входять до складу визначення поняття границі. Насправді, може статися, що подія A відбуватиметься при усіх наступних випробуваннях, починаючи з певного номера $n > N$ і тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P$, але не виключений і той випадок, коли починаючи з певного номера $n > N$, подія A не відбуватиметься при жодному випробуванні, і тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0$.

Отже, при необмеженій кількості незалежних випробувань може статися, що $\frac{m}{n} \rightarrow p$, але цього може й не статися. Тоді виникає запитання про те, яка ж імовірність того, що $\frac{m}{n} \rightarrow p$? З теореми Бернуллі відповіді на це запитання не впливає, але в більш глибоких дослідженнях з теорії імовірностей доводиться, що при $n \rightarrow \infty$ $P\left\{\frac{m}{n} \rightarrow p\right\} = 1$. Отже, $\frac{m}{n} \rightarrow p$, не за типом границі, а за імовірністю.

Змістовий модуль 2 МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Тема 8. Основні поняття. Сутність вибіркового методу

Математична статистика розробляє методи опрацювання результатів спостережень масових випадкових явищ з метою виявлення наявних у них закономірностей. Збір статистичних даних проводять за спеціальними правилами статистичного спостереження.

Сутність **вибіркового методу** полягає в тому, що висновки, зроблені на основі вивчення частини сукупності (випадкової вибірки), можна розповсюдити на всю сукупність (генеральну сукупність). Числові характеристики генеральної сукупності називають генеральними параметрами. До них належать математичне сподівання та дисперсія, які є параметрами розподілу досліджуваної ознаки. Їх теоретичні значення ніколи не відомі, але їх можна оцінити за значеннями вибірових характеристик.

Оцінкою параметра називають числову характеристику, отриману в результаті обробки випадкової вибірки.

Статистичними аналогами параметрів розподілу є генеральна середня \bar{X} та генеральна дисперсія $\sigma_{ген}^2$. Розраховані за даними вибірки числові характеристики позначають \tilde{X} або $\bar{X}_{виб}$, $\sigma_{виб}$ або $S_{виб}$.

При здійсненні вибірки можливі помилки спостереження, до яких належать помилки реєстрації та помилки репрезентативності. **Помилки реєстрації** виникають через неточності та погрішності при одержанні відомостей про одиниці сукупності, в результаті чого правдиве значення досліджуваної ознаки не збігається з його зареєстрованим значенням. **Помилки репрезентативності** є різницею між вибіровими та генеральними характеристиками досліджуваної сукупності. Їх підрозділяють на систематичні та випадкові. **Систематичні помилки** пов'язані з тим, що структура вибірки відрізняється від структури генеральної сукупності. Зазвичай це буває пов'язане з порушенням випадковості відбору. **Випадкові помилки** репрезентативності пояснюються тим, що досліджується тільки частина сукупності. Отже, наявність випадкової помилки споконвічно властива вибіровому методу.

Введемо ряд визначень.

Об'єктом спостереження називають сукупність предметів або явищ, об'єднаних за будь-якою загальною ознакою або властивістю якісного або кількісного характеру. Усякий об'єкт статистичного спостереження складається з окремих елементів — **одиниць спостереження**. Для вивчення характерних властивостей об'єкта випадковим чином відбирають з усієї сукупності обмежене число одиниць спостереження.

Генеральною сукупністю називають об'єкт спостереження, що містить всю сукупність одиниць, з яких здійснюється вибірка.

Вибірковою сукупністю, або просто **вибіркою**, називають сукупність одиниць спостереження, випадково відібраних з генеральної сукупності.

Розрізняють два типи випадкових вибірок: власно випадкова повторна вибірка (схема повернутої кулі) та власно випадкова безповторна вибірка (схема неповерненої кулі). Вибір схеми відбору залежить від характеру досліджуваного об'єкта.

Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральної) називають кількість одиниць цієї сукупності. Кількість одиниць вибіркової сукупності позначають n , а генеральної - N .

У результаті статистичного спостереження одержують набір значень спостережуваної ознаки - дані. Значення ознаки при переході від одного елемента до іншого варіюють (змінюються).

Варіантою називають кожне окреме значення досліджуваної ознаки

$$x_1, x_2, \dots, x_n \dots$$

Частотою називають число, що показує, скільки разів зустрічається в сукупності та чи інша варіанта. Частоти позначають відповідно

$$m_1, m_2, \dots, m_n \dots$$

Первинною статистичною сукупністю називають неупорядкований набір значень досліджуваної ознаки, отриманих у результаті спостереження.

Першим кроком в обробці статистичних даних є впорядкування отриманих значень ознаки у порядку зростання або убутання, тобто побудова варіаційного ряду.

Варіаційним рядом називають таблицю, в одному рядку якої розташовують варіанти x_1, x_2, \dots, x_n у зростаючому або зменшуваному порядку, а в іншому - відповідні частоти $m_1, m_2, \dots, m_n \dots$

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
m_i	m_1	m_2	\dots	m_n

де $\sum_{i=1}^n m_i = n$.

Варіація досліджуваної ознаки може бути дискретною або безперервною.

Дискретною називають варіацію, у якій окремі значення ознаки (варіанти) відрізняються одна від одної на певну скінчену величину (зазвичай ціле число).

Безперервною називають варіацію, у якій значення ознаки можуть відрізнятися одне від одного на як завгодно малу величину.

Замість абсолютних значень частот m_i зазвичай використовують відносні - p_i^* . Для одержання відносних частот необхідно відповідну частоту поділити на суму всіх частот:

$$p_1^* = \frac{m_1}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad p_2^* = \frac{m_2}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \dots, \quad p_n^* = \frac{m_n}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (8.1)$$

Сума усіх відносних частот дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n p_i^* = 1 \quad (8.2)$$

Якщо варіація ознаки має безперервний характер, то весь діапазон отриманих значень поділяють на інтервали так, що кінець одного інтервалу є початком наступного. При цьому частоти належать не до окремого значення ознаки, а до інтервалу значень. Зазвичай як значення інтервалу приймають його середину.

У вибірці, що має дискретний характер варіації, число одиниць спостереження n може опинитися дуже великим. У результаті варіаційний ряд може виявитися громіздким та незручним для обробки. У такому випадку діапазон отриманих значень також поділяють на інтервали. Довжину i -го інтервалу позначають k_i та визначають за формулою:

$$k_i = x_{i\max} - x_{i\min} \quad (8.3)$$

де $x_{i\max}$ і $x_{i\min}$ - відповідно верхня та нижня границі i -го інтервалу.

При групуванні даних з метою побудови інтервального варіаційного ряду завжди встає запитання про вибір оптимальної кількості інтервалів. Це пов'язано з тим, що занадто велика кількість інтервалів зробить варіаційний ряд громіздким, а занадто мала призведе до огрубіння результатів статистичного аналізу. Для визначення оптимальної довжини інтервалу рекомендується використовувати формулу Старджеса:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n} \quad (8.4)$$

де x_{\max} і x_{\min} - відповідно найбільше та найменше значення варіантів ряду; n - кількість одиниць сукупності.

Для наочності варіаційний ряд можна зобразити графічно у вигляді полігону розподілу, кумулятивної кривої, або гістограми.

Полігон розподілу (багатокутник розподілу) будують в прямокутній системі координат. Величину ознаки відкладають на осі абсцис, частоти або відносні частоти - на осі ординат (рис. 8.1).

Кумулятивна крива (кумулята) утворюється при зображенні варіаційного ряду з накопиченими відносними частотами в прямокутній системі координат (рис. 8.2). Накопичена частота певної варіанти утворюється підсумовуванням всіх частот варіант, що передують даній, із частотою цієї варіанти. При побудові кумуляти дискретної ознаки за віссю абсцис відкладають значення ознаки (варіанти). Ординатами є вертикальні відрізки, довжина яких пропорційна накопиченій відносній частоті цієї або іншої варіанти Σp_i^* . З'єднавши вершини ординат прямими лініями, одержимо ламану (криву) кумуляту. При $\Delta x_i \rightarrow 0$ кумулята прагне до безперервної кривої, що уявляє собою функцію розподілу випадкової величини.

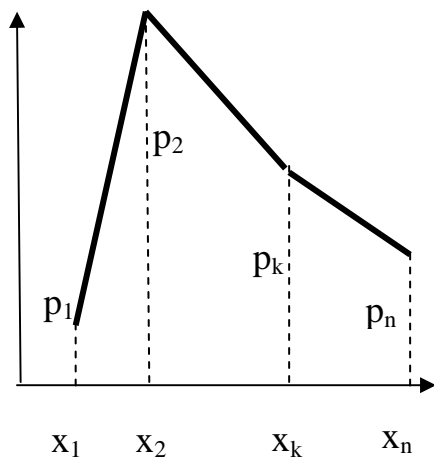


Рис. 8.1 – Полігон розподілу

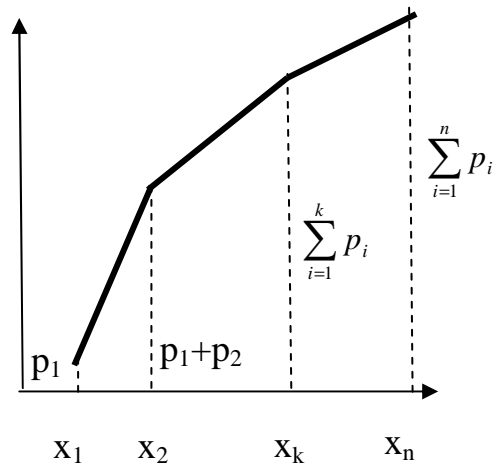


Рис. 8.2 – Кумулятивна крива

Гістограму розподілу будують аналогічно полігону в прямокутній системі координат (рис. 8.3). При побудові гістограми на осі абсцис вибирають відрізки, що відповідають інтервалам, на яких будують прямокутники із площею, пропорційною відносним частотам інтервалів p_i^* . З умови побудови гістограми випливає, що вся її площа дорівнює 1. Очевидно також, що при $\Delta x_i \rightarrow 0$ гістограма прагне до безперервної залежності, що уявляє собою щільність розподілу випадкової величини.

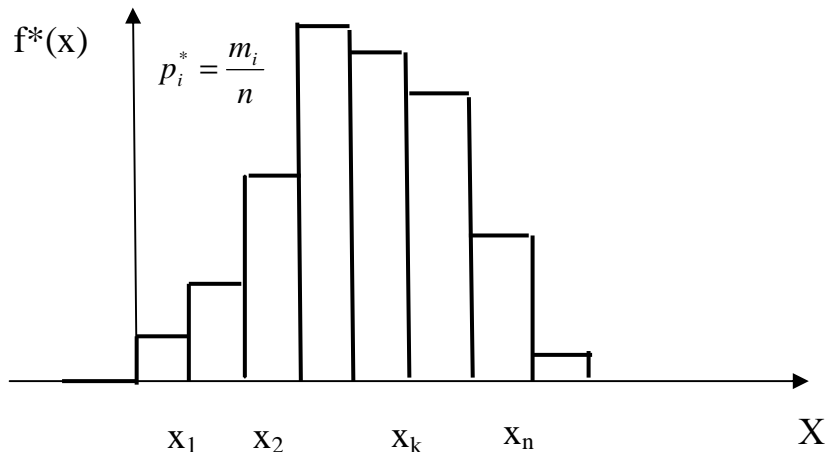


Рис. 8.3. Гістограма

Визначення закону розподілу спостережуваної ознаки за статистичними даними

Одним з завдань математичної статистики є одержання оцінок числових характеристик випадкових величин. Іншим завданням є визначення закону розподілу випадкової величини за статистичним даними. Оскільки ці дані завжди обмежені, то виникає задача згладжування або вирівнювання статистичних рядів за допомогою аналітичних виразів, що є найбільш компактним вираженням

закономірності. Статистичний (варіаційний) ряд дозволяє побудувати шукані статистичні закони розподілу.

Зокрема, щоб знайти статистичну функцію розподілу $F^*(x)$, досить підрахувати кількість варіантів, в яких ознака X прийняла значення менші за x , тобто $X < x$. Якщо кількість таких варіантів $m(x)$, а обсяг сукупності дорівнює n , то

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n} \quad (8.5)$$

Якщо результати спостереження зведені у групований статистичний ряд, то на його підставі будують гістограму, з урахуванням того, що частота появ ознаки на i -му інтервалі буде

$$p^* = \frac{m_i}{n},$$

де m_i – кількість появ x на i -му інтервалі.

Для оформлення статистичного ряду у вигляді гістограми за віссю абсцис відкладають інтервали ряду, а потім на кожному інтервалі будують прямокутник, площа якого дорівнює p^*_i .

Задача з вирівнювання статистичних рядів збігається до підбору теоретичної кривої розподілу, що виражає лише істотні риси статистичного матеріалу. Якщо клас функцій, що описують розподіл, відомий, то задача збігається до раціонального вибору параметрів розподілу. Наприклад, гістограма, наведена на рис. 8.3, наводить на думку про нормальний розподіл ознаки X :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тоді задача збігається до відшукування двох параметрів - вибіркової середньої \bar{x} та вибіркового середнього квадратичного відхилення s .

Одним з методів розв'язання поставленої задачі є метод моментів (початкових та центральних), що був запропонований у 1894 році англійцем Пірсоном. За цим методом числові параметри розподілу обирають з таким розрахунком, щоб кілька найважливіших числових характеристик (моментів) дорівнювали їх статистичним оцінкам. Зокрема, математичне сподівання та дисперсію приймають рівними їх статистичним оцінкам - вибірковій середній та вибірковій дисперсії:

$$m_x = \tilde{X}, \quad D_x = \sigma_{\text{вib}}^2.$$

Іншим методом визначення статистичних оцінок параметрів розподілу є метод максимальної правдоподібності, запропонований у 1912 році англійцем Фішером.

Тема 9. Числові характеристики варіаційного ряду

Однією з найважливіших характеристик варіаційного ряду є його середнє значення. Розрізняють середню арифметичну зважену та незважену. Середню арифметичну зважену визначають як відношення суми добутків варіантів на

відповідні їм частоти до суми всіх частот:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \quad \text{або} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i p_i^* \quad (9.1)$$

де m_i – частоти варіаційного ряду; p_i^* – відносні частоти; k – кількість груп з однаковими значеннями ознаки.

Для розрахунку незваженої середньої арифметичної використовують формулу

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (9.2)$$

де n – кількість елементів варіаційного ряду.

Залежно від особливостей досліджуваного явища окрім арифметичної використовують геометричну, гармонійну, квадратичну, кубічну та інші середні величини.

Розглянемо ряд характеристик, які використовуються для вимірювання варіації ознаки.

Варіаційний розмах R , або широта розподілу – різниця між найбільшим та найменшим значеннями варіаційного ряду:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (9.3)$$

Варіаційний розмах застосовують для приблизної оцінки варіації, тому що він говорить тільки про відстань між найбільшим та найменшим значеннями варіантів варіаційного ряду. Більш точну міру варіації визначають за допомогою середнього лінійного відхилення, дисперсії та стандартного відхилення (або середнього квадратичного відхилення).

Середнє лінійне відхилення, або просте середнє відхилення (позначають d) є середньою арифметичною абсолютних значень відхилень варіант від середньої. Обчислюють середнє лінійне відхилення незважене або зважене:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \quad d = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| m_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \quad (9.4)$$

Дисперсія варіаційного ряду – це середня арифметична квадрата відхилення значень ознак ряду від їх середньої арифметичної. Дисперсію незважену і зважену обчислюють за формулами:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \quad (9.5)$$

Стандартне відхилення варіаційного ряду визначають як арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} . \quad (9.6)$$

Дисперсія - це міра розсіювання варіантів щодо середньої арифметичної. Чим більша варіація, тим далі від середньої знаходяться можливі значення ознак.

Коефіцієнт варіації V є часткою стандартного відхилення від середнього значення варіаційного ряду:

$$V = \frac{\sigma}{x} . \quad (9.7)$$

Отже, коефіцієнт варіації є відносною мірою варіації, в той час як стандартне відхилення - абсолютна міра розсіювання варіантів ряду. Чим менше значення коефіцієнту варіації, тим однорідніше сукупність за досліджуваною ознакою.

Властивості вибірових числових характеристик

Будь-які значення вибірових характеристик, що обчислені на підставі обмеженої кількості елементів вибірки, містять елемент випадковості. Очевидно, що обробка кількох вибірок однакового обсягу дасть низку різних оцінок відповідної числової характеристики. Отже, оцінки числових характеристик є випадковими величинами на відміну від самих числових характеристик, значення яких не є випадковими. Необхідно, щоб помилка від заміни правдивого значення числової характеристики його наближеною оцінкою була мінімальною. Такій вимозі задовольняють оцінки числових характеристик, що мають властивості спроможності, незміщеності та ефективності.

Оцінка параметра a^* є **спроможною**, якщо при $n \rightarrow \infty$ вона збігається за імовірністю до оцінюваного параметра a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^* = a . \quad (9.8)$$

Зокрема, на підставі теореми Чебишева вибіркова середня \tilde{X} , що визначена за формулами (9.1) та (9.2), є спроможною оцінкою генеральної середньої \bar{X} . Формули (9.5) дають спроможну оцінку генеральної дисперсії.

Оцінка параметра a^* є **незміщеною** (тобто не містить систематичної помилки), якщо її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру a :

$$M[a^*] = a . \quad (9.9)$$

Вибіркова середня \tilde{X} , що визначена за формулами (9.1) та (9.2), є лінійною функцією n незалежних випадкових величин x_i , тому вона сама є випадковою величиною, а отже має свої числові характеристики: математичне сподівання та дисперсію. Покажемо, що математичне сподівання вибіркової середньої не залежить від числа дослідів n і дорівнює генеральній середній:

$$M[\tilde{X}] = M\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum x_i\right] = \frac{1}{n} * n * M[X] = \bar{X} .$$

Визначимо дисперсію оцінки вибіркової середньої:

$$\sigma^2[\tilde{X}] = \sigma^2 \left[\frac{\sum x_i}{n} \right] = \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\sum \sigma_i^2 \right) = \left(\frac{1}{n} \right)^2 n \sigma^2 = \frac{\sigma_{ген}^2}{n}, \quad (9.10)$$

звідки одержимо середнє квадратичне відхилення вибіркової середньої:

$$\sigma[\tilde{X}] = \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}. \quad (9.11)$$

Очевидно, що із збільшенням числа дослідів n $\sigma^2[\tilde{X}]$ прагне до нуля, що свідчить про прагнення \tilde{X} до не випадкової величини \bar{X} .

Отже, вибірка середня є незміщеною оцінкою генеральної середньої.

Розглянемо вибірку дисперсію. Можна показати, що математичне сподівання вибіркової дисперсії, що визначене за формулою

$$\sigma_{выб}^2 = \frac{\sum (x_i - \tilde{X})^2}{n}, \quad (9.12)$$

не дорівнює генеральній дисперсії, тобто є зміщеною оцінкою:

$$M[\sigma_{выб}^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_{ген}^2$$

Користуючись цією оцінкою, ми будемо робити систематичну помилку у меншу сторону. Щоб її позбутися, треба ввести виправлення – помножити оцінку дисперсії, що отримана за формулою (9.12), на $n/(n-1)$. Незміщену оцінку дисперсії називають також виправленою дисперсією. Її позначають S^2 та визначають за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_{выб}^2 = \frac{\sum (x_i - \tilde{X})^2}{n-1} \quad (9.13)$$

Можна показати, що S^2 є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії:

$$M[S^2] = \frac{n}{n-1} M[\sigma_{выб}^2] = \frac{n}{n-1} * \frac{n-1}{n} * \sigma_{ген}^2.$$

Якщо число спостережень n велике, то значення вибіркової дисперсії, обчисленої за формулою (9.12) практично збігається зі значенням, обчисленим за формулою (9.13). При $n > 50$ вони практично не відрізняються.

Оцінка параметра a^* є **ефективною**, якщо при заданому обсязі вибірки вона має найменшу дисперсію. Ступінь ефективності оцінюють відношенням дисперсій:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \quad (9.14)$$

тобто якщо $F > 1$, то σ_2^2 ефективніша, та навпаки.

Якщо на підставі статистичних даних необхідно визначити оцінки числових характеристик системи двох випадкових величин X та Y , то окрім вибірко-

вих середніх та вибірових дисперсій знаходять оцінку кореляційного моменту за формулою:

$$K_{xy}^* = \frac{\sum (X_i - m_x^*)(Y_i - m_y^*)}{n-1} \quad (9.15)$$

Наведені оцінки є спроможними та незміщеними.

Довірчий інтервал та довірна імовірність

Розглянуті оцінки параметрів є точковими, тому що характеризуються одним числом. Якщо точкова оцінка параметра визначена на підставі вибірки малого обсягу, вона може значно відрізнятись від оцінюваного параметра. Для визначення помилки від заміни генерального параметра його оцінкою використовують поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.

Нехай для певного параметру розподілу, наприклад, математичного сподівання m_x отримано спроможну та незміщену оцінку a^* . Потрібно визначити можливу помилку l . Призначимо досить велику імовірність β (0,95; 0,99) таку, що подію $A = \{ |a^* - m_x| < l \}$, яка характеризується цією імовірністю, можна вважати практично достовірною. Знайдемо значення l , для якого справедлива рівність

$$P(A) = P\{(a-l) < m_x < (a+l)\} = \beta. \quad (9.16)$$

Рівність (9.16) означає, що діапазон можливої помилки при заміні m_x на a^* з імовірністю β дорівнюватиме $\pm l$. Тут a^* та β відомі, l підлягає визначенню. З імовірністю β невідоме значення параметра m_x буде знаходитися у інтервалі $L = [a^* - l, a^* + l]$. Більші за l за абсолютним значенням помилки, зустрічатимуться з імовірністю

$$\alpha = 1 - \beta.$$

Зауважимо, що величина m_x є не випадковою, а випадковим є положення відрізка $L=2 \cdot l$ на осі абсцис, зумовлене випадковою величиною a^* . Отже, довірчу імовірність β можна трактувати як імовірність того, що випадковий інтервал L накріє точку m_x (рис. 9.1).

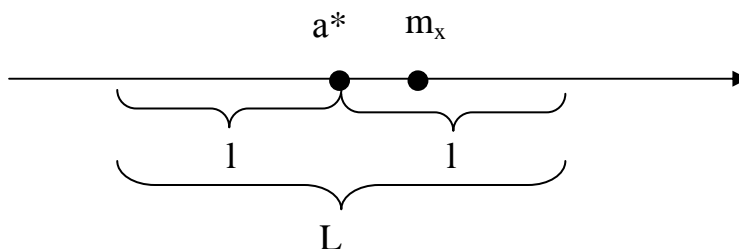


Рис. 9.1 – Довірчий інтервал

Отже, значення β та L характеризують ступінь впевненості та величину погрішності при визначенні правдивого значення шуканого параметру m_x .

Приклад. Нехай зроблено n незалежних дослідів, з яких визначені значення вибіркової середньої \tilde{X} та вибіркової дисперсії S^2 . Потрібно визначити довірчий інтервал для вибіркової середньої.

Оскільки вибірка середня визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

її можна розглядати як функцію n незалежних випадкових величин x_i , які в загальному випадку можуть бути підлеглими будь-яким законам розподілу. Тоді, відповідно до центральної граничної теореми, закон розподілу вибіркової середньої \tilde{X} буде близьким до нормального з параметрами:

$$M[\tilde{X}] = \bar{x};$$

$$D[\tilde{X}] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \sum D[x_i] = \frac{nD[x_i]}{n^2} = \frac{D[x_i]}{n}$$

$$\sigma_{\text{виб}} = \frac{\sigma[\tilde{X}]}{\sqrt{n}}.$$

Припустимо, що генеральна дисперсія відома, тоді скориставшись інтегралом імовірності

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

та врахувавши, що помилка симетрична відносно a^* , а β задано, дістанемо:

$$P\{(a^* - l) < \tilde{X} < (a^* + l)\} = \beta = \Phi\left(\frac{l}{\sigma[\tilde{X}]}\right).$$

Користуючись таблицею значень інтеграла імовірностей, можемо знайти аргумент

$$\frac{l}{\sigma[\tilde{X}]} = \Phi^{-1}(\beta), \text{ звідси } l = \sigma[\tilde{X}] \Phi^{-1}(\beta).$$

Довірчий інтервал $L = 2 \cdot l$.

Тема 10. Елементи теорії кореляції

Метою кореляційного аналізу є визначення форми залежності між випадковими величинами X та Y і оцінка тісноти зв'язку між ними.

Залежність

$$y = f(x), \quad (10.1)$$

в якій кожному значенню X відповідає одне певне значення Y , називають **функціональною**.

Одному значенню випадкової величини X x_i може відповідати низка значень Y : y_1, y_2, \dots, y_k , що може бути викликане впливом різних факторів на випадкову величину Y або помилками виміру. У цьому випадку залежність називають **статистичною**. Для кожного значення x_i можна визначити умовне середнє \bar{y}_i (рис. 10.1).

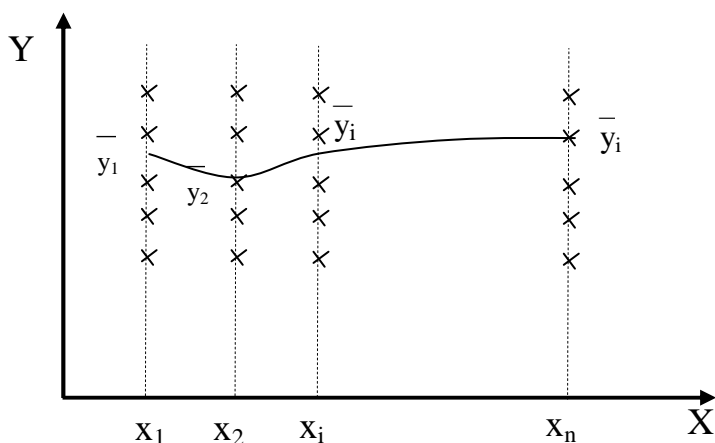


Рис. 10.1 – Статистична залежність.

Статистичною називають залежність між X та Y , при якій із зміною випадкової величини X змінюється розподіл випадкової величини Y . Якщо при зміні X змінюється середнє значення Y , то таку статистичну залежність називають **кореляційною**.

$$\bar{y}_x = \varphi(x) \quad (10.2)$$

Кореляційний аналіз заснований на використанні рівняння регресії.

Регресією Y на X називають умовне математичне сподівання випадкової величини Y за умови, що X прийняла значення x_i . Лінію, що з'єднує точки \bar{y}_i , називають **лінією регресії**. Для апроксимації лінії регресії аналітичним виразом використовують **рівняння регресії**. На практиці найчастіше використовують лінійне рівняння регресії:

$$Y = \rho_{yx} x + b \quad (10.3)$$

Коефіцієнт при x ρ_{yx} називають коефіцієнтом регресії.

Метод найменших квадратів

Для визначення значень параметрів ρ_{yx} та b рівняння регресії (10.3) застосовується **метод найменших квадратів** (МНК), що дозволяє при відомому класі залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$ так вибрати їх значення, щоб вона щонайкраще відображала дані спостережень.

При використанні МНК вимога найкращого узгодження $\bar{y}_x = \varphi(x)$ з дослідними даними зводиться до того, щоб сума квадратів відхилень кривої, що згладжує залежність, від експериментальних точок оберталася на мінімум:

$$\sum_{i=1}^n (y_{ip} - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (10.4)$$

де y_i – значення Y , отримані в результаті спостережень;

y_{ip} – розрахункові значення Y , отримані за виразом кривої, що згладжує $\varphi(x)$.

Якщо всі виміри провадилися з однаковою точністю та помилки вимірів розподілені за нормальним законом, то знайдена залежність буде найбільш імовірною із всіх можливих у даному класі функцій.

З огляду на те, що $y_{ip} = \varphi(x_i)$, вираз (9.4) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2 \rightarrow \min. \quad (10.5)$$

Невідомі параметри шуканої залежності визначають, записавши її не тільки як функцію аргументу x , але і як функцію невідомих параметрів a_j .

$$\sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_m) - y_i]^2 \rightarrow \min. \quad (10.6)$$

Умова (10.6) виконується, якщо всі часткові похідні суми квадратів відхилень за параметрами a_j дорівнюватимуть нулю. Часткові похідні дають систему $m+1$ рівнянь із $m+1$ невідомими, розв'язання якої дає шукані параметри a_j , що задовольняють умові (10.5).

Дістанемо для лінійного рівняння регресії (10.3) за методом найменших квадратів вирази для коефіцієнта регресії ρ_{yx} та вільного члена b . Для цього підставимо у (10.6) вираз (10.3)

$$\sum_{i=1}^n [\rho_{yx} x_i + b - y_i]^2 \rightarrow \min.$$

Для відшукування мінімуму візьмемо похідні за параметрами ρ_{yx} та b і дорівняємо їх до нуля, дістанемо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n [\rho_{yx} x_i + b - y_i] * x_i &= 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n [\rho_{yx} x_i + b - y_i] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (10.7)$$

з якої у результаті перетворень отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{yx} * \sum x_i^2 + b * \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ \rho_{yx} * \sum x_i + nb &= \sum y_i \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

звідки виразимо ρ_{yx} та b

$$\begin{aligned} \rho_{yx} &= \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum x_i^2 * \sum y_i - \sum x_i * \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції

Для оцінки тісноти лінійної кореляційної залежності служить вибірковий коефіцієнт кореляції. Для його визначення підставимо у вираз (9.8) наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n}, \text{ звідки } \sum x_i = \bar{x}n; \\ \bar{y} &= \frac{\sum y_i}{n}, \text{ звідки } \sum y_i = \bar{y}n; \\ \overline{x^2} &= \frac{\sum x_i^2}{n}, \text{ звідки } \sum x_i^2 = \overline{x^2}n. \end{aligned}$$

Одержимо

$$\left. \begin{aligned} \rho_{yx} * \overline{x^2}n + b * \bar{x}n &= \sum x_i y_i \\ \rho_{yx} * \bar{x} + b &= \bar{y} \end{aligned} \right\}, \quad (10.10)$$

з другого рівняння виразимо b

$$b = \bar{y} - \rho_{yx} * \bar{x} \quad (10.11)$$

та підставивши його у перше рівняння, визначимо коефіцієнт регресії

$$\begin{aligned} \rho * \sum x_i^2 + (\bar{y} - \rho * \bar{x}) \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ \rho * (\sum x_i^2 - \bar{x} * \sum x_i) &= \sum x_i y_i - \bar{y} * \sum x_i \\ \rho &= \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} * \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} * \sum x_i} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{y} \bar{x}}{n \bar{x}^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{y} \bar{x}}{n * \sigma_x^2}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Помножимо отриману рівність на дріб $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ і одержимо

$$\rho * \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{y} \bar{x}}{n * \sigma_x \sigma_y},$$

де $\rho * \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_e$ – вибірковий коефіцієнт кореляції.

Підставимо у рівняння $\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$ вираз для b (10.11) та дістанемо рівняння регресії у наступному вигляді:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{xy} * (x - \bar{x}) \quad \text{або} \quad \bar{y}_x - \bar{y} = r_e \frac{\sigma_y}{\sigma_x} * (x - \bar{x}) \quad (10.13)$$

Коефіцієнт кореляції r_b має важливе значення. Він дозволяє оцінити величину лінійного зв'язку між двома випадковими величинами X та Y . Покладемо у рівнянні (10.13) $r_b = 0$, тоді

$$\bar{y}_x - \bar{y} = 0,$$

або

$$\bar{y}_x = \bar{y},$$

тобто при $r_b = 0$ всі умовні середні дорівнюють вибірковій середній, тобто при зміні випадкової величини X випадкова величина Y не змінюється й графік рівняння регресії паралельний осі абсцис. Це говорить про те, що Y не залежить від X , між ними немає лінійного зв'язку. Однак X та Y можуть бути зв'язані нелінійним зв'язком, який може опинитися як кореляційним так і функціональним.

Дисперсія Y у точці $X=x_i$ щодо умовного середнього S_y визначається за формулою

$$S_y = D_y (1 - r_e^2), \quad (10.14)$$

де D_y - дисперсія Y щодо загального середнього.

Покладемо в цій формулі $r_b = 1$, тоді

$$S_y = 0,$$

тобто розсіювання значень Y у кожній точці відсутнє, рівняння (10.13) матиме вигляд $\bar{y}_x - \bar{y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} * (x - \bar{x}) = 0$, тобто будь-яка пара чисел x та y йому задовольняє.

Звідси випливає, що при $r_b = 1$ між X і Y існує функціональний лінійний зв'язок.

З формули (10.14) також випливає, що із збільшенням r_b дисперсія відносно умовного середнього S_y зменшується, тобто зменшується розсіювання навколо умовних середніх, а отже тіснота зв'язку збільшується.

Отже, вибірковий коефіцієнт кореляції приймає значення від -1 до +1, і характеризує тісноту лінійного зв'язку між ознаками у вибірці. Якщо $r_b = 0$, то лінійний зв'язок відсутній, чим ближче значення $|r_b|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок, і при $r_b = 1$ він стає функціональним.

Вибіркове кореляційне відношення

Для оцінки тісноти нелінійного кореляційного зв'язку застосовують вибіркове кореляційне відношення η . Вибірковим **кореляційним відношенням** Y до X називається відношення міжгрупового середнього квадратичного відхилення до загального середнього квадратичного відхилення ознаки Y :

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}^-}{\sigma_y} \quad (10.15)$$

де $\sigma_{y_x}^-$ – міжгрупове середнє квадратичне відхилення, визначається як квадратний корінь із міжгрупової дисперсії за формулою

$$\sigma_{y_x}^- = \sqrt{D_{\text{межгр}}} = \sqrt{\frac{\sum N_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{n}}, \quad (10.16)$$

де \bar{y}_j – умовна середня значень Y j -ї групи;

N_j – об'єм j -ї групи.

Міжгрупова дисперсія – це дисперсія групових середніх відносно загальної середньої.

Внутрішньогрупова дисперсія є середнім арифметичним групових дисперсій:

$$D_{\text{вн.гр}} = \frac{\sum N_j S_y}{n} \quad (10.17)$$

Можна показати, що дисперсія ознаки є сумою внутрігрупової та міжгрупової дисперсій:

$$D_y = D_{\text{вн.гр}} + D_{\text{міжгр}}. \quad (10.18)$$

Якщо Y функціонально залежить від X , то кожному певному значенню X відповідає єдине значення Y , і дисперсія відносно умовного середнього $S_y = 0$, відповідно дорівнює нулю середнє арифметичне дисперсій щодо умовного середнього. Отже, при функціональному зв'язку між X та Y внутрішньогрупова дисперсія дорівнює нулю, а загальна дисперсія Y дорівнює міжгруповій дисперсії, отже, якщо зв'язок функціональний, то кореляційне відношення дорівнює одиниці:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}^-}{\sigma_y} = 1. \quad (10.19)$$

Якщо кореляційне відношення дорівнює нулю, $\eta=0$, то між X та Y зв'язок відсутній. Це випливає з того, що в цьому випадку міжгрупова дисперсія дорівнює нулю, а отже відсутній розкид умовних середніх відносно загальної середньої. Тобто, умовні середні при усіх значеннях X однакові, а значить Y не залежить від X .

Кореляційне відношення має наступні властивості:

- його значення лежить у межах від 0 до 1:

$$0 \leq \eta \leq 1;$$

- значення кореляційного відношення більше або дорівнює вибіркового коефіцієнту кореляції:

$$\eta \geq |r_b|;$$

- якщо кореляційне відношення дорівнює вибіркового коефіцієнту кореляції, $\eta = |r_b|$, то між X та Y є лінійна кореляційна залежність.

Елементи регресійного аналізу

МНК дозволяє одержати точкові оцінки коефіцієнтів прийнятої залежності $Y = \varphi(X)$. Але оскільки коефіцієнти рівняння регресії є величинами випадковими, вимагають перевірки й саме залежність та її коефіцієнти.

1. Перевірку адекватності рівняння регресії експериментальним даним виконують за критерієм Фішера

$$F = \frac{D_{ya}}{D_{yo}} \quad (10.20)$$

де D_{ya} – дисперсія адекватності. Її визначають за формулою:

$$D_{ya} = \frac{1}{n - s} \sum_{i=1}^n (y_{ip} - m_{yi})^2,$$

де n - кількість дослідів;

s - кількість шуканих параметрів апроксимуючої залежності;

y_{ip} - розрахункове значення функції в i -й точці при апроксимації залежністю $Y = \varphi(X)$;

m_{yi} - середнє значення y в i -му досліді;

D_{yo} - дисперсія дослідів. Її визначають на підставі даних паралельних дослідів:

$$D_{yo} = \frac{1}{m * n} \sum_{i=1}^n D_{yi},$$

де m - кількість паралельних дослідів в i -й точці;

n - кількість дослідів;

$m*n$ - загальна кількість вимірів;

D_{yi} – дисперсія i -го дослідів, визначена за формулою

$$D_{yi} = \frac{\sum_{j=1}^m (y_{ij} - m_{yi})^2}{m - 1},$$

де m_{yi} – середнє значення Y у i -му досліді.

Отримане значення F порівнюють з табличним F_T . Якщо $F < F_m$, то гіпотеза про адекватність не відкидається.

Тема 11. Перевірка статистичних гіпотез

Статистичні гіпотези

Будь-яка інформація, отримана в результаті обробки статистичних даних, має імовірнісний характер. Зокрема, оцінка генеральної середньої є величиною випадковою, розподіленою нормально з параметрами \bar{x} та $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Оцінка генеральної дисперсії також є випадковою. Тому будь-який висновок, що базується на статистичних даних, є науковим припущенням і називається **статистичною гіпотезою**. Статистичні гіпотези підлягають перевірці, мета якої - визначити, чи не суперечить висунута гіпотеза вихідному статистичному матеріалу (вибірці).

Основну гіпотезу, сформульовану в результаті обробки статистичного матеріалу, називають **нульовою гіпотезою** та позначають H_0 . На протигагу нульовій гіпотезі призначають одну або кілька альтернативних (конкуруючих) гіпотез. Їх позначають H_1, H_2, \dots і т.ін.

Наприклад, якщо перевіряють гіпотезу про дорівнюваність параметру a певному заданому значенню a_0 , то як альтернативні гіпотези можна розглянути гіпотези, що a перевершує або менше за a_0 :

$$H_0: a = a_0;$$

$$H_1: a > a_0;$$

$$H_2: a < a_0;$$

$$H_3: a \neq a_0.$$

Вибір альтернативної гіпотези зумовлюється формулюванням задачі.

Як критерії для перевірки статистичних гіпотез використовують випадкові величини (статистики), особливість яких полягає в тому, що кожна з них має свій закон розподілу, що не залежить від закону розподілу генеральної сукупності та вибірки, а залежить від умов обробки вибірових даних. Значення цих випадкових величин, позначимо їх Z , з відповідними їм імовірностями наводяться у довідкових таблицях.

На підставі вибірових даних визначають значення критерію Z та порівнюють його з табличним значенням, що відповідає умовам обробки даних. Перевірка статистичної гіпотези заснована на принципі, за яким малоімовірні події вважаються неможливими, а події, що мають більшу імовірність, - достовірними. Якщо імовірність розрахункового значення критерію досить велика, тобто факт цілком імовірний, то говорять, що гіпотеза не суперечить даним спостереження. Якщо ж ця імовірність мала, тобто подія практично неможлива, то говорять, що нульова гіпотеза суперечить даним спостереження, і її відхиляють.

Питання про те, яку імовірність треба вважати досить великою або малою, вирішується не з математичних міркувань, а залежить від наслідків того, що прийнята гіпотеза опиниться невірною. Малу імовірність, за якою значення критерію вважається практично неможливим, позначають α і називають **рівнем значущості**. У практичних задачах зазвичай призначають рівень значущості $\alpha = 0,05-0,15$. Область значень критерію Z , що відповідає рівню значущості α , називають **критичною областю**. Область значень критерію Z , що відповідають

імовірності $1-\alpha$, називають **областю прийняття гіпотези**. Значення критерію, що відокремлює область прийняття гіпотези від критичної області називають **критичною точкою z_k** (рис. 11.1).

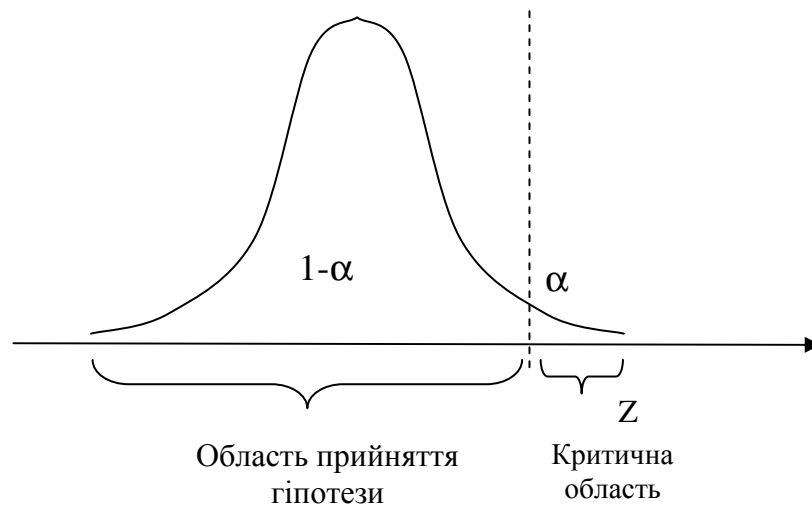


Рис. 11.1 – Розташування значень критерію Z

Залежно від того, як сформульовані конкуруючі гіпотези, критична область може бути однобічною (лівосторонньою або правобічною) і двосторонньою. Відповідно критерій може мати одну або дві критичні точки (рис. 11.2).



Рис. 11.2 - Критичні області

Отже, перевірка гіпотези заснована на факті, що критерій прийняв значення з імовірністю більшою або меншою за α . Помітимо, що імовірність цього факту не дорівнює одиниці, а виходить, він не є достовірною подією. Отже, результат перевірки гіпотези може опинитися помилковим. Прийнято розрізняти помилки двох видів:

- 1) помилка 1-го роду - відкинута нульова гіпотеза, в той час як вона була правильною;
- 2) помилка 2-го роду - прийнята нульова гіпотеза, в той час як вона була невірною.

Якщо перевірка гіпотези показала, що вона не погодиться з вибірковими даними та повинна бути відкинута, а задача все ж вимагає розв'язання, то для цього переглядають розв'язок задачі, використовують іншу вибірку з генеральної сукупності або збільшують обсяг вибірки. Тобто, проблема може бути вирішеною.

Гірше вирішується питання, якщо зроблено помилку другого роду, тобто, прийнято невірну гіпотезу. Імовірність помилки 2-го роду позначається β . Ця імовірність повинна бути як можна меншою. Тоді імовірність того, що помилка 2-го роду не буде зроблена, визначиться як $1-\beta$. Величина імовірності β залежить від якості використовуваного для перевірки гіпотези критерію. Імовірність $1-\beta$ називають **потужністю критерію**, чим вона більша, тим краще використовуваний критерій, вище надійність перевірки.

Ми розглянемо чотири критерії (нормальний розподіл, t-критерій Стюдента, F-критерій Фішера та χ^2 -критерій Пірсона), які використовуються найчастіше. Який з названих критеріїв використовувати, залежить від характеру розв'язуваної задачі, тобто від формулювання нульової гіпотези H_0 . Розглянемо ряд типових задач.

Порівняння вибіркової середньої й генеральної середньої нормальної сукупності

Нехай з нормальної генеральної сукупності витягнута вибірка об'ємом n і визначена вибірка середня \bar{x} . Передбачається, що генеральна середня дорівнює a і генеральна дисперсія дорівнює σ^2 . Треба перевірити, чи є значущою розбіжність між вибірковою й генеральною середніми, або вона зумовлена випадковими причинами, тобто не є значущою. Запишемо нульову гіпотезу, врахуємо при цьому, що математичне сподівання вибіркової середньої дорівнює генеральній середній:

$$H_0: M[\bar{x}] = a.$$

Сформулюємо альтернативну гіпотезу:

$$H_1: M[\bar{x}] \neq a.$$

При такому формулюванні альтернативної гіпотези необхідно побудувати двосторонню критичну область, імовірність влучення в яку дорівнює рівню значущості α . Як міра розбіжності між вибірковою і генеральною середніми використаємо випадкову величину Z :

$$Z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma_z}, \quad (11.1)$$

яка є нормованою нормальною випадковою величиною з параметрами $M[Z]=0$ і $\sigma_z = 1$.

Найбільша потужність критерію досягається, якщо імовірність влучення критерію Z у кожний із двох інтервалів критичної області дорівнює $\alpha/2$:

$$P\{|Z| > z_{кр}\} = \alpha/2. \quad (11.2)$$

Оскільки розподіл критерію Z симетричний відносно нуля, критичні точки також розташовані симетрично відносно нуля, тобто область прийняття нульової гіпотези $(-z_{кр}, z_{кр})$.

Для визначення критичних точок можна скористуватися функцією Лапласа $\Phi(x)$, що являє собою імовірність влучення нормованої випадкової величини в інтервал $(0, x)$, тобто:

$$P\{0 < X < x\} = \Phi(x).$$

Оскільки розподіл Z симетричний відносно нуля, по теоремі додавання імовірностей маємо:

$$P\{0 < Z < z_{кр}\} + P\{z_{кр} < Z < \infty\} = 1/2,$$

або, виразивши імовірність через функцію Лапласа, одержимо:

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha/2 = 1/2,$$

звідки

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}. \quad (11.3)$$

Таким чином, визначивши значення функції Лапласа, можна по таблиці знайти значення її аргументу, тобто критичну точку $z_{кр}$. Тоді двостороння критична область визначається двома нерівностями:

$$\begin{aligned} Z &< -z_{кр}; \\ Z &> z_{кр}, \end{aligned}$$

а область прийняття гіпотези:

$$|Z| < z_{кр}. \quad (11.4)$$

У випадку, коли генеральна дисперсія невідома, як критерій використовують t -розподіл (розподіл Стюдента) з $(n-1)$ ступенями свободи. Спостережуване значення критерію при цьому обчислюють за формулою

$$T = \frac{\bar{x} - a}{s / \sqrt{n}}, \quad (11.5)$$

де s - вибіркове середнє квадратичне відхилення.

У практичних задачах часто виникає ситуація, коли відома величина припустимої помилки δ при визначенні вибіркової середньої. Виникає задача визначення об'єму вибірки, що забезпечує задану припустиму величину помилки $\delta = \bar{x} - \alpha$. Об'єм вибірки n можна визначити, скориставшись формулою (11.5). Нехай у результаті перевірки нульової гіпотези визначена двостороння критична область, що відповідає рівню значущості α , тоді

$$n = \frac{t_{\text{огвст}}^2(\alpha, k) * s^2}{(\bar{x} - \alpha)^2} = \frac{t_{\text{огвст}}^2(\alpha, k) * s^2}{\delta^2}$$

де k – число ступенів свободи.

Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей

Нехай є дві незалежні вибірки й варто визначити, чи взяті вони з нормальних генеральних сукупностей X і Y з однаковою дисперсією. Запишемо нульову гіпотезу:

$$H_0: D[X] = D[Y], \quad (11.6)$$

і сформулюємо альтернативну гіпотезу:

$$H_1: D[X] \neq D[Y]. \quad (11.7)$$

Як критерій для перевірки нульової гіпотези про рівність дисперсій нормальних генеральних сукупностей приймають випадкову величину, що являє собою відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

де $s_1 > s_2$.

Нульова гіпотеза припускає, що дві вибірки незалежні й узяті з нормальних генеральних сукупностей з однаковими дисперсіями, у цьому випадку $F=1$. Однак, навіть якщо гіпотеза вірна, то малоімовірно, що s_1 прийме точно таке ж значення, як s_2 через вплив випадковості. Таким чином, завдання полягає в тому, щоб перевірити, чи буде випадкова величина F досить близька до одиниці.

Випадкова величина F має розподіл Фішера, що залежить тільки від ступенів свободи $k_1=n_1-1$ і $k_2=n_2-1$, де n_1 і n_2 об'єм вибірки з більшою й з меншою вибірковими дисперсіями відповідно, і не залежить від інших параметрів.

Для перевірки нульової гіпотези (10.6) при конкуруючій гіпотезі (10.7) будують двосторонню критичну область, що відповідає рівню значущості α . Двостороння критична область визначається двома нерівностями:

$$\begin{aligned} F &< F_{\text{кр}1}; \\ F &> F_{\text{кр}2}, \end{aligned}$$

а область прийняття гіпотези:

$$F_{\text{кр}1} < F < F_{\text{кр}2}$$

причому, імовірність влучення критерію в кожний із двох інтервалів критичної області дорівнює $\alpha/2$.

Критерії згоди

Якщо по вибірці спостережень визначався закон розподілу генеральної сукупності, то виникає необхідність оцінити розбіжність між емпіричним і теоретичним розподілами. Для цього використовують **критерії згоди**, які дозволяють судити, якою є розбіжність між **емпіричним** і **теоретичним** розподілами - випадковою або значущою.

Якщо розбіжність виявиться випадковою, то вважають, що дані спостережень (вибірки) не суперечать висунутій гіпотезі про закон розподілу генеральної сукупності й, отже, гіпотезу приймають; якщо ж розбіжність виявиться значущою, то дані спостережень суперечать гіпотезі, і її відхиляють. Як міру розбіжності використовують деяку величину U .

Є декілька критеріїв згоди: критерій χ^2 (Пірсона), критерій Колмогорова, критерій Романовського та ін.

Пірсон запропонував як міру розбіжності використовувати суму квадратів відхилень $(p_i^* - p_i)$, узятих з певними вагами c_i , тоді

$$U = \sum_{i=1}^k c_i (p_i^* - p_i)^2, \quad (11.8)$$

де p_i^* – частота появи ознаки X на i -му інтервалі;

p_i – теоретична імовірність тієї самої події;

k – кількість інтервалів;

c_i – ваговий коефіцієнт, який враховує, що відхилення $(p_i^* - p_i)$, які належать до різних груп ряду, не можна вважати рівноправними за значущістю, тому що те саме за абсолютною величиною відхилення може бути малим для великого p_i та істотним для малого p_i .

Пірсон показав, що якщо прийняти

$$c_i = \frac{n}{p_i}, \quad (11.9)$$

то величина U при збільшенні n наближається до величини χ^2 , розподіл якої залежить тільки від кількості ступенів свободи

$$r = k - s, \quad (11.10)$$

де k – кількість інтервалів; s – кількість зв'язків (число незалежних умов).

Підставивши (11.9) у (11.8) та врахувавши, що $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, дістанемо:

$$\chi_P^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (11.11)$$

Чим більше погоджуються емпіричний та теоретичний розподіли, тим менше розрізняються емпіричні та теоретичні частоти й тем менше значення χ_P^2 . Звідси випливає, що χ_P^2 характеризує близькість емпіричного та теоретичного розподілів.

Існують довідкові таблиці, в яких указана імовірність того, що в результаті впливу випадкових факторів величина χ^2 прийме значення не менше обчисленого за даними вибірки.

Для визначеності приймають рівень значущості α (звичайно $\alpha = 0,1-0,15$). Якщо імовірність, знайдена за таблицями, опиниться менше α , то це означає, що в результаті впливу випадкових причин напустила подія, яка практично неможлива. Таким чином, той факт, що χ^2 прийняла значення χ_P^2 не можна пояснити випадковими причинами. Це можна пояснити тим, що генеральна сукупність не розподілена за передбачуваним законом розподілу й, виходить, висунута гіпотеза про закон розподілу генеральної сукупності повинна бути відкинута. Якщо імовірність, знайдена за таблицями, перевищує α , то гіпотеза про закон розподілу генеральної сукупності погоджується з даними спостережень і тому її можна прийняти.

Елементи дисперсійного аналізу

Дисперсійний аналіз – метод математичної статистики, який застосовують для аналізу результатів спостережень, які залежать від різних одночасно діючих

факторів. Задачі дисперсійного аналізу – вибір найбільш важливих факторів, оцінка їх впливу і т.ін.

Метод дисперсійного аналізу розробив англійський статистик Р.Фішер. В основі методу лежить порівняння дисперсій. На практиці дисперсійний аналіз застосовують у задачах, де потрібно оцінити вплив деякого фактору F на кількісну ознаку X. Суть дисперсійного аналізу зводиться до порівняння дисперсії, зумовленої впливом фактору F (факторної дисперсії) з дисперсією, зумовленою випадковими причинами (залишковою дисперсією). Очевидно, коли вплив фактору F є значущим, то й відмінність факторної дисперсії від залишкової дисперсії повинна бути значущою. І навпаки, якщо вплив фактору незначущий, то факторна й залишкова дисперсія відрізняються незначуще.

Нехай значення ознаки X отримані в результаті спостереження р різних груп досліду з кількістю спостережень в j-й групі, рівною q. Середнє значення ознаки X у кожній j-й групі (групова середня) визначиться за формулою

$$\bar{x}_{zpj} = \frac{\sum_{i=1}^q x_{ij}}{q}$$

Результати спостережень зведені у таблицю:

Номер досліду	Номер групи					
	1	2	...	j	...	p
1	x ₁₁	x ₁₂	...	x _{1j}	...	x _{1p}
2	x ₂₁	x ₂₂	...	x _{2j}	...	x _{2p}
...
i	x _{i1}	x _{i2}	...	x _{ij}	...	x _{ip}
...
q	x _{q1}	x _{q2}	...	x _{qj}	...	x _{qp}
групова середня	\bar{x}_{zp1}	\bar{x}_{zp2}	...	\bar{x}_{zpj}	...	\bar{x}_{zpp}

Загальна кількість спостережуваних значень ознаки X дорівнює pq. Загальна середня визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q x_{ij}}{pq}.$$

Можна оцінити повне розсіювання ознаки X, що викликане як випадковими причинами, так і впливом фактору F, визначивши суму квадратів відхилень всіх спостережуваних значень x_{ij} від загальної середньої. Її називають **загальною** сумою квадратів відхилень та визначають за формулою

$$S_{\zeta\alpha\bar{\alpha}} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (x_{ij} - \bar{x})^2. \quad (11.12)$$

Вважають, що фактор F впливає на різні групи значень ознаки. Розсіювання за фактором або розсіювання між групами можна оцінити, визначивши

суму квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої. Її називають **факторною** сумою квадратів відхилень та визначають за формулою

$$S_{\text{факт}} = q * \sum_{j=1}^p (\bar{x}_{\text{гpj}} - \bar{x})^2. \quad (11.13)$$

Вважають, що на значення ознаки в j -й групі фактор F впливає однаково, а їх розсіювання зумовлене впливом випадкових причин. Суму квадратів відхилень спостережуваних значень ознаки X від своєї групової середньої $\bar{x}_{\text{гpj}}$ називають **залишковою** сумою квадратів відхилень. Залишкова сума квадратів відхилень характеризує розсіювання всередині групи й визначається формулою:

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (x_{ij} - \bar{x}_{\text{гpj}})^2. \quad (11.14)$$

Можна показати, що справедливе співвідношення

$$S_{\text{заг}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{зал}}, \quad (11.15)$$

яке найчастіше використовують для визначення залишкової суми квадратів відхилень

$$S_{\text{зал}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}}. \quad (11.16)$$

Оскільки дисперсійний аналіз припускає порівняння дисперсій, то використовуючи загальні, факторну та залишкову суми квадратів відхилень, визначають відповідні дисперсії.

Загальна дисперсія:

$$s_{\text{заг}}^2 = \frac{S_{\text{заг}}}{pq - 1} \quad (11.17)$$

де $pq - 1 = n - 1$ - кількість ступенів свободи загальної дисперсії.

Факторна дисперсія:

$$s_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{p - 1} \quad (11.18)$$

де $p - 1$ – кількість ступенів свободи факторної дисперсії; p - кількість груп впливу фактору F .

Залишкова дисперсія:

$$s_{\text{зал}}^2 = \frac{S_{\text{зал}}}{p(q - 1)} \quad (11.19)$$

де $p(q - 1)$ – кількість ступенів свободи залишкової дисперсії, визначена як різниця між кількістю ступенів свободи загальної та факторної дисперсій:

$$(pq - 1) - (p - 1) = p(q - 1).$$

Припустимо, що вплив фактору F відсутній. У цьому випадку групові середні $\bar{x}_{\text{гpj}}$ приймають різні значення у результаті впливу тільки випадкових причин, а виходить, розрізняються незначуще. Відповідно факторна та залишкова дисперсії є незміщеними оцінками невідомої генеральної дисперсії і також розрізняються незначуще. У такій задачі формують нульову гіпотезу про рівність факторної та залишкової дисперсій. Якщо порівняти оцінки цих дисперсій за критерієм F , то критерій укаже, що гіпотезу можна прийняти.

Якщо нульова гіпотеза про рівність групових середніх (а отже факторної та залишкової дисперсій) є помилковою, то із зростанням розбіжності між груповими середніми збільшуватиметься факторна дисперсія та спостережуване значення критерію F . При $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза про рівність факторної та залишкової дисперсій буде відкинута.

Отже, для того, щоб перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх нормальних сукупностей з однаковими дисперсіями, треба перевірити за критерієм F нульову гіпотезу про рівність факторної та залишкової дисперсій. Причому, якщо факторна дисперсія опиниться меншою за залишкову, то з цього випливає справедливність гіпотези про рівність групових середніх, і F -критерій можна не обчислювати.

Тема 12. Елементи теорії випадкових процесів

Поняття випадкового процесу

Функція X аргументу t називають випадковою, якщо при кожному заданому значенні аргументу t величина X є випадковою. Вид, прийнятий функцією X у результаті досліду, називають **реалізацією** функції X .

Процеси, описувані випадковими функціями, називають **випадковими** або **стохастичними**.

На рис. 12.1 показане сімейство реалізацій випадкової функції $X(t)$.

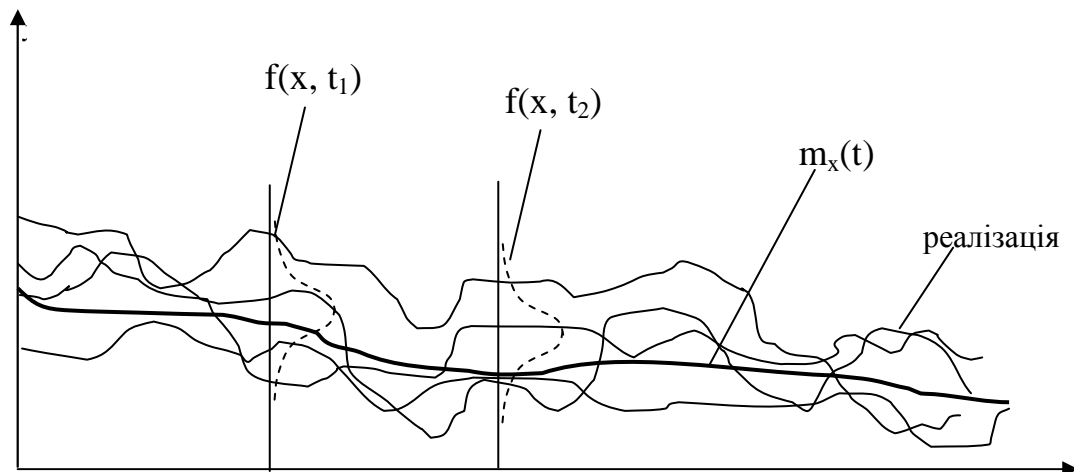


Рис. 12.1 – Сімейство реалізацій випадкової функції $X(t)$

Імовірнісні характеристики випадкового процесу є функціями часу. Якщо зафіксувати час t , то випадкова функція перетворюється на звичайну випадкову величину, що може приймати різні значення й має деякий закон розподілу зі своїми параметрами. Будемо називати цю величину перетином випадкової функції, що відповідає даному t .

Закон розподілу однієї випадкової величини є функцією одного аргументу. Закон розподілу системи двох випадкових величин - функція двох аргументів і т.ін. Однак використовувати функції багатьох аргументів як імовірнісні ха-

характеристики настільки незручно, що зазвичай розглядають тільки їх числові характеристики. Обмежимося розглядом найпростіших характеристик випадкових функцій, аналогічних числовим характеристикам випадкових величин. Апарат числових характеристик дозволяє порівняно просто вирішувати багато практичних задач.

На відміну від числових характеристик випадкових величин, що представляють собою певні числа, характеристики випадкових функцій являють собою не числа, а функції.

Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називають не випадкову функцію, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перетину випадкової функції:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називають не випадкову функцію $D_x(t)$, значення якої для кожного t дорівнює дисперсії відповідного перетину випадкової функції:

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Таким чином, математичне сподівання - це деяка середня функція аргументу t , біля якої різним образом варіюють конкретні реалізації випадкової функції. Дисперсія випадкової функції при кожному t характеризує розкид можливих реалізацій випадкової функції щодо середнього.

Однак для опису основних особливостей випадкових функцій цих характеристик недостатньо.

У випадкових функцій $X_1(t)$ і $X_2(t)$ на рис. 12.2 та 12.3 приблизно однакові математичні сподівання й дисперсії, але характер цих випадкових функцій різко відрізняється. Для $X_2(t)$ характерна яскраво виражена залежність між її значеннями при різних t (якщо при t_1 вона прийняла значення менше середнього, те саме і при t_2 - менше середнього). Випадкова функція $X_1(t)$ має різко коливальний характер з безперервними безладними коливаннями. Для такої функції характерне швидке загасання залежності між її значеннями в міру збільшення відстані за t між ними.

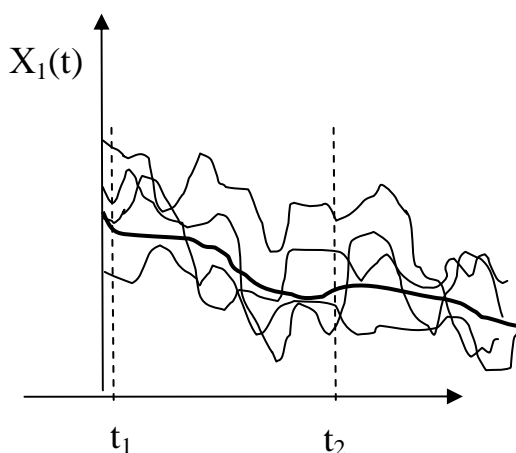


Рис. 12.2 – Сімейство реалізацій випадкової функції $X_1(t)$

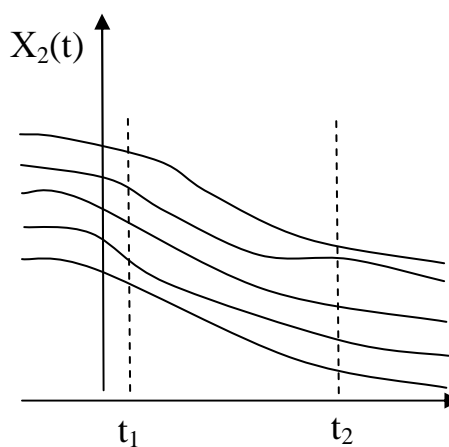


Рис. 12.3 – Сімейство реалізацій випадкової функції $X_2(t)$

Внутрішня структура розглянутих процесів зовсім різна, і для її опису вводять спеціальну характеристику - кореляційну функцію. Кореляційна функція характеризує ступінь залежності між перетинами випадкової функції, що належать до різних t .

Кореляційною функцією випадкової функції $X(t)$ є не випадкова функція двох аргументів $K(t, t')$, яка при кожній парі значень t, t' дорівнює кореляційному моменту відповідних перетинів випадкової функції:

$$K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t) * \overset{0}{X}(t')]. \quad (12.1)$$

Таким чином, якщо повернутися до рисунків 12.2 і 12.3, кореляційна функція $X_2(t)$ повільно убуває зі збільшенням проміжку (t, t') , а кореляційна функція $X_1(t)$ убуває швидко.

Якщо аргументи кореляційної функції K_x збігаються, тобто $t = t'$, то

$$K_x(t) = M[\overset{0}{X}(t) * \overset{0}{X}(t)] = M[\overset{0}{X}^2(t)] = D_x(t), \quad (12.2)$$

тобто при $t = t'$ кореляційна функція обертається на дисперсію випадкової функції $X(t)$.

Таким чином, необхідність у визначенні дисперсії випадкової функції відповідає. Як основні характеристики випадкової функції досить розглядати її математичне сподівання й кореляційну функцію.

Стаціонарний випадковий процес

На практиці часто зустрічаються процеси, що протікають у часі приблизно однорідно та мають вигляд безперервних випадкових коливань навколо деякого середнього значення. Причому, ні середня амплітуда, ні характер цих коливань не виявляють істотних змін із часом. Такі випадкові процеси називаються **стаціонарними**. Нестационарний процес характерний тим, що він має тенденцію розвитку в часі.

Випадковий процес $x(t)$ називають стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від початку відліку часу, тобто закон розподілу перетинів той самий:

$$f(x, t_1) = f(x, t_2) = f(x).$$

Не залежать від початку відліку часу і числові характеристики - математичне сподівання і дисперсія:

$$m(t) = \text{const}; D_x(t) = \text{const}. \quad (12.3)$$

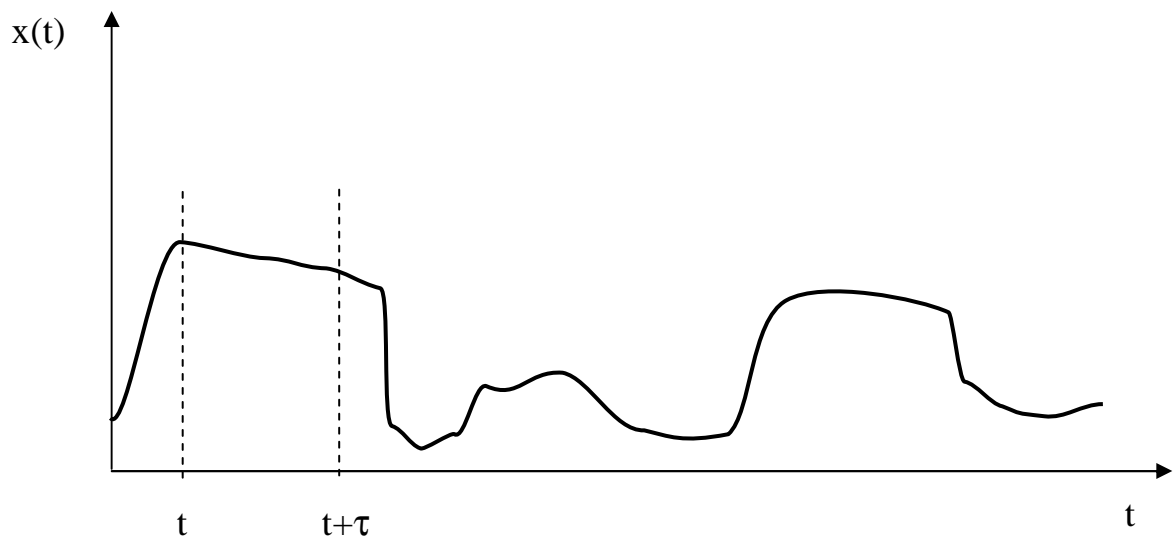


Рис. 12.4 – Стаціонарний випадковий процес

Встановимо, якій умові повинна задовольняти кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу. Покладемо $t'=t+\tau$ і розглянемо кореляційний момент двох перетинів $x(t)$, розділений інтервалом часу τ , $K(t, t+\tau)$.

Очевидно, що цей кореляційний момент не повинен залежати від того, де саме на осі взятий інтервал τ , а повинен залежати тільки від довжини цього інтервалу, тобто

$$K(t_1, t_1+\tau) = K(\tau) = R_X(\tau). \quad (12.4)$$

Таким чином, вираження (12.4) – єдина істотна умова, якій повинен задовольняти стаціонарний випадковий процес. Ця залежність називається кореляційною функцією $R_X(\tau)$. Якщо $\tau=0$, то кореляційна функція дорівнює дисперсії й максимальна:

$$R_X(\tau)/\tau=0 = D_X \quad (12.5)$$

Зі збільшенням τ зв'язок між перетинами стає слабкіше, тобто $R_X(0) \geq R_X(\tau)$, що показано на рис. 12.5.

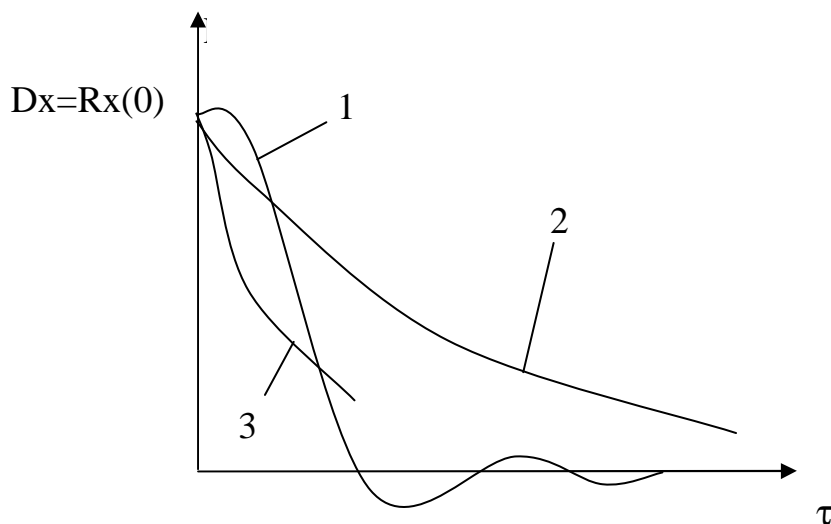


Рис. 12.5 – Кореляційна функція

Кореляційна функція характеризує внутрішній частотний склад випадкового процесу. Чим більше високочастотних складових містить випадковий процес, тим різкіше спадає зв'язок зі збільшенням τ (криві 2 та 3 на рис. 12.5). Колювання кореляційної функції (крива 1) вказують на сховану періодичність процесу.

Ергодична гіпотеза

Випадковий процес називають ергодичним, якщо всі його статистичні характеристики можна визначити за одною реалізацією достатньої тривалості. Стаціонарний випадковий процес зазвичай має властивість ергодичності. При цьому з імовірністю, що дорівнює одиниці, числові характеристики, визначені за множиною реалізацій,

$$\text{математичне сподівання} \quad M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f[x(t)] dx \quad (12.6)$$

та кореляційна функція (як другий змішаний центральний момент)

$$R_x(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)] = \iint x(t)x(t+\tau) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (12.7)$$

дорівнюють відповідним числовим характеристикам, що визначені за часом:

$$\text{математичному сподіванню} \quad M[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (12.8)$$

$$\text{та кореляційної функції} \quad R_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (12.9)$$

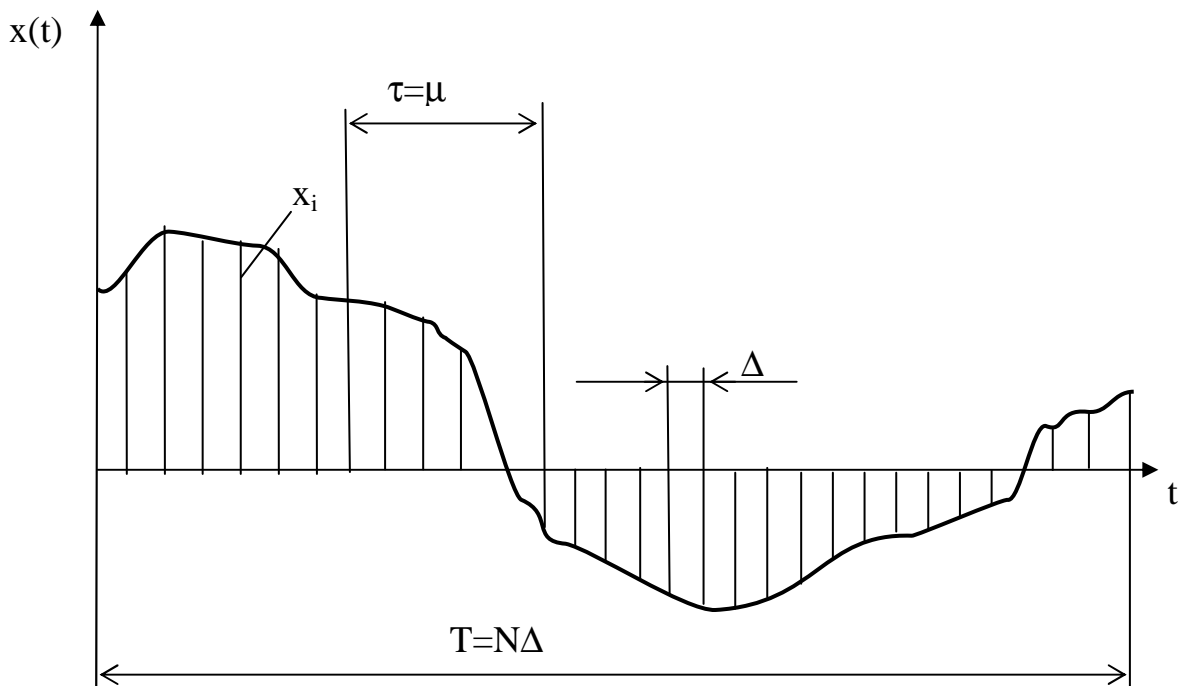


Рис. 12.6 – Ергодичний випадковий процес

Обчислення характеристик стаціонарного ергодичного випадкового процесу за однією реалізацією провадиться в наступній послідовності:

1. Для обчислення інтегралів (12.6) та (12.7) дискретизують задачу, тобто спостережуваний період часу поділяють на інтервали Δ . Інтервал дискретності обирають на підставі теореми Котельникова:

$$\Delta \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}},$$

де ω_{\max} – максимальна частота, що міститься у реалізації.

При цьому кількість отриманих ординат складатиме $N+1$, де $N=T/\Delta$.

2. Обчислюють значення математичного сподівання, замінивши інтеграл (12.8) сумою:

$$m_x = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i. \quad (12.10)$$

3. Розраховують значення кореляційної функції, користуючись дискретним співвідношенням:

$$R_x(\mu) = \frac{1}{N-\mu} \sum_{i=0}^{N-\mu} x_i x_{i+\mu}, \quad (12.11)$$

де x_i – центроване значення ознаки у момент часу $t_i = i \cdot \Delta$, рівне $x_i = x_i - m_x$, $i = 0, N-\mu$;

$x_{i+\mu}$ – центроване значення ознаки для моменту часу $t_{i+\mu}$.

Параметр μ визначають за формулою $\mu = \tau/\Delta = 0, \mu_{\max}$. Максимальне значення μ зазвичай обирають, виходячи з нижчої частоти, що міститься у реалізації:

$$\mu_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_{\max} * \Delta} = \frac{\tau_{\max}}{\Delta}.$$

Для одержання достовірних відомостей про кореляційну функцію період спостереження T повинен набагато перевищувати τ_{\max} :

$$\tau_{\max} \leq (0,1-0,2) T \quad \text{або} \quad \mu_{\max} \leq (0,1-0,2) N.$$

4. Отримані експериментальні точки згладжують за методом найменших квадратів залежністю вигляду:

$$R_x(\tau) = A e^{-\alpha \tau} \cos \beta \tau, \quad (12.12)$$

де визначають параметри α та β , а параметр A знаходять з (12.12) при $\mu=0$.

Імітаційне моделювання

Методи імітаційного моделювання дозволяють зібрати необхідну інформацію про поведінку системи шляхом створення її комп'ютеризованої моделі. Імітаційне моделювання є технікою оцінки значень функціональних характеристик системи, що моделюють. Попередником сучасного імітаційного моделювання вважають метод Монте-Карло, основна ідея якого полягає у використанні вибірки випадкових чисел для одержання імовірнісних або детермінованих оцінок будь-яких величин. У першому наближенні ідею методу можна описати так: процес функціонування складної системи імітується на ЕОМ з усіма

супровідними його випадками. Отже, будують одну реалізацію випадкового процесу з випадковим ходом та результатом. Сама така реалізація не дає підстав до вибору рішення, але, одержавши множину таких реалізацій, можна їх обробити як звичайний статистичний матеріал, визначити середні характеристики за множиною та одержати подання про те, які умови задачі та елементи рішення впливають на функціонування системи. Таким чином, при використанні методу Монте-Карло випадковість використовується як апарат дослідження. Імітація є випадковим експериментом, тому будь-який результат імітаційного моделювання містить експериментальні помилки і підлягає статистичній перевірці. Для будь-якого експерименту так само важливим є питання, яким повинен бути обсяг вибірки n та кількість реалізацій досліджуваної випадкової величини N .

Для систем, у яких бере участь велика кількість різнорідних елементів, а випадкові фактори складним способом взаємодіють між собою, процеси неможливо описати аналітично як за допомогою детермінованих, так і імовірнісних методів, а імітаційне моделювання, як правило, виявляється простішим за аналітичне, а нерідко і єдино можливим методом моделювання.

Відмінність сучасних імітаційних моделей від методу Монте-Карло полягає в тому, що імітаційна модель зазвичай пов'язана з вивченням реально існуючої системи, поведінка якої є функцією часу. Існує два типи імітаційних моделей. **Безперервні моделі** використовуються для систем, поведінка яких змінюється в часі безупинно. Безперервні імітаційні моделі зазвичай подаються у вигляді різницево-диференціальних рівнянь, що описують взаємодію між різними елементами системи. **Дискретні моделі** описують системи, поведінка яких змінюється тільки в певні моменти часу. Типовим прикладом такої моделі є черга, що є системою, зміни у якій відбуваються лише тоді, коли заявка надходить у чергу або залишає систему після обслуговування. Це означає, що в будь-якій дискретній імітаційній моделі є дві головних події, за якими необхідно досліджувати систему. В імітаційній моделі події, пов'язані із прибуттям, визначаються часом між надходженнями заявок, а події, пов'язані з їх доглядом, - часом обслуговування.

Випадковість в імітаційних моделях виникає тоді, коли інтервал часу t між однорідними подіями є випадковим. Відомий ряд методів одержання послідовних випадкових значень $t=t_1, t_2, \dots$, що мають заданий розподіл імовірностей $f(x)$. Розглянемо два з них: метод зворотних функцій та метод згорток. Обидва методи базуються на використанні незалежних однаково розподілених випадкових чисел, що мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$. Метод зворотних функцій використовують для безперервних розподілів, наприклад для експонентного або рівномірного. Метод згорток використовують в складніших ситуаціях, наприклад, при генеруванні випадкових чисел, що мають нормальний розподіл або розподіл Пуассона.

Метод зворотних функцій вимагає виконання наступних дій. Спочатку

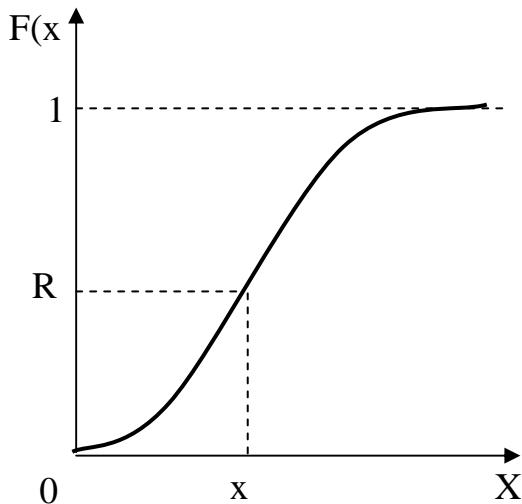


Рис. 9.1 – Метод зворотних функцій

генерується випадкове число R з інтервалу $[0,1]$, потім обчислюється шукане випадкове число $x=F^{-1}(R)$, де F^{-1} – функція, зворотна до функції розподілу $F(x)=P\{X<x\}$ (рис. 9.1). Метод заснований на тому, що якщо функцію розподілу $F(x)$ розглядати як випадкову величину, то вона розподілена рівномірно на інтервалі $[0,1]$.

Розглянемо приклад. Нехай час появи клієнтів розподілено за експонентним законом з параметром $\lambda=4$. Функція розподілу має вигляд $F(t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-4t}$. Врахуємо, що $F(t)=R$, одержимо $t=\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$. Оскільки R – випадкове число

з інтервалу $[0,1]$ і $(1-R)$ також випадкове число з того самого інтервалу, можна замінити $(1-R)$ на R . Нехай $R=0,9$, тоді одержимо одне конкретне значення інтервалу часу між заявками $t=\frac{1}{4}\ln(1-0,9)=0,577$.

Значення R – повинні обиратися випадково з інтервалу $[0,1]$ і підпорядковуватися рівномірному розподілу.

Основна ідея **методу згорток** полягає в тому, щоб виразити шукану випадкову величину у вигляді суми інших випадкових величин, для яких легко отримати реалізації випадкових значень. Для одержання значень, що відповідають нормальному розподілу з математичним сподіванням m і стандартним відхиленням σ використовують центральну граничну теорему. Нагадаємо, що суть її зводиться до того, що сума n однаково розподілених випадкових величин прагне до нормального розподілу при нескінченному збільшенні n . Нехай $x=R_1+R_2+\dots+R_n$, де R_1, R_2, \dots, R_n – випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0,1]$. Відповідно до центральної граничної теореми випадкова величина x є асимптотично нормальною величиною із середнім $n/2$ і дисперсією $n/12$. Тоді випадкова величина X з математичним сподіванням m і стандартним відхиленням σ визначається за формулою

$$X = m + \sigma \left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right).$$

У практичних розрахунках для зручності зазвичай приймають $n=12$, тоді $X = m + \sigma(x-6)$.

Імітаційне моделювання являє собою статистичний експеримент. Його результати повинні ґрунтуватися на відповідних статистичних перевірках з використанням, наприклад, довірчих інтервалів та методів перевірки гіпотез. Для цього спостереження повинні задовольняти наступним вимогам: мати стаціонарні розподіли, тобто, що не змінюються під час проведення експерименту, підпорядковуватися нормальному розподілу й бути незалежними.

Характер імітаційних обчислень стимулює створення спеціалізованих мов програмування. У цей час на ринку програмних продуктів для моделювання домінують комерційні пакети Arena, AweSim і GPSS/H, які мають розвинений інтерфейс, що спрощує процес створення імітаційних моделей.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Ачкасов А. Є., Плакіда В. Т., Воронков О. О., Воронкова Т. Б. Теорія імовірностей і математична статистика: Навчальний посібник.- Харків, ХНАМГ, 2008.- 249 с.
2. Гмурман В. Э. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. школа, 1977. - 498 с.
3. Гмурман В. Э. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. школа, 1975. – 330 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. - М.: Высшая школа, 1999.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961.
6. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Наука, 1969.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций./ Под ред. А. А. Свешникова. - Наука, 1970.

Навчальне видання

**ОХРИМЕНКО Вячеслав Миколайович
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович
ВОРОНКОВА Тетяна Борисівна**

Конспект лекцій

з курсу

«ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

*(для студентів другої вищої освіти ФПО та ЗН спеціальностей
7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво»,
7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція»)*

Відповідальний за випуск *О. С. Гаєвський*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2012, поз. 195Л

Підп. до друку 18.06.2012
Друк на ризографі.
Зам. №

Формат 60x84/16
Ум. друк. арк. 4,0
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014